Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.А. КУЗИН

МАТЕМАТИКА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия
для учащихся Инженерного лицея НГТУ

НОВОСИБИРСК
2014

УДК 51(075.8)
К 89

Рецензенты:
Резников Б. С., д-р техн. наук, профессор;
Козлова Т. А., учитель высшей категории
Инженерного лицея НГТУ

Работа подготовлена на кафедре инженерной математики
для учащихся 10–11-х классов Инженерного лицея НГТУ

Кузин Г.А.

К 89 Математика. Решение задач с параметрами: учеб. пособие / Г.А. Кузин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. – 66 с.

ISBN 978-5-7782-2396-7

Задачи с параметрами из ЕГЭ требуют знания различных методов их решения. В учебном пособии приведены типовые примеры задач с подробными решениями графическим методом и методами подвижных границ и областей. Ко всем задачам даны ответы или указания к решению.

Пособие предназначено для учащихся 10–11-х классов Инженерного лицея НГТУ и может быть использовано на аудиторных занятиях, а также при подготовке к ЕГЭ по математике.

УДК 51(075.8)

ISBN 978-5-7782-2396-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи с параметрами из ЕГЭ считаются задачами повышенного уровня сложности, они требуют от ученика знания различных приемов, методов решения и исследования. Анализ материалов ЕГЭ, методической литературы показывает, что многие задачи с параметрами можно решить, используя *методы подвижных границ и областей, графический метод*.

Метод подвижных границ – это фактически аналитический метод, связанный, как правило, с перебором возможных вариантов. Пусть, например, решением неравенства $F(x,a) < 0$, содержащего параметр a, является промежуток $x \in (f(a), g(a))$ на числовой прямой, концы которого $f(a)$ и $g(a)$ зависят от параметра a. При изменении параметра концы промежутка могут перемещаться по прямой или даже совпадать, т. е. являются *подвижными.* Тем самым искомый промежуток как бы двигается по числовой прямой, сжимаясь или расстягиваясь, чтобы включать (или не включать) то, что требуется в рассматриваемой задаче.

В пособии много внимания уделяется *графическому методу* решения задач. Он позволяет выявить особенности расположения графиков при изменении параметра, найти «критические» положения графика, отделяющие множество графиков, удовлетворяющих условию задачи, от не удовлетворяющих, после чего наступает аналитическая часть решения, связанная с вычислением критических значений параметра и записи ответа.

При решении задач, содержащих неравенства с параметром, полезно знакомство с *методом областей* на координатной плоскости, который служит аналогом метода интервалов на прямой.

Пособие предназначено для учащихся 10–11-х классов Инженерного лицея НГТУ. Целью пособия является знакомство учащихся с некоторыми приемами и методами решения задач с параметрами.

Здесь разобраны типовые примеры, иллюстрирующие особенности применения метода подвижных границ, графического метода и метода областей. Многие задачи допускают решение различными приемами, что позволяет увидеть взаимосвязь важнейших разделов математики, сравнить сложность решения задачи тем или иным способом и выбрать наиболее простой вариант решения.

Пособие содержит задачи из ЕГЭ прошлых лет для самостоятельного решения. Ко всем задачам даны ответы, в некоторых случаях решение задачи сопровождается методическими указаниями.

Автор надеется, что при внимательном чтении с «карандашом» пособие будет полезно учащимся при подготовке к ЕГЭ.

Автор выражает искреннюю признательность рецензентам: профессору кафедры инженерной математики, доктору технических наук Б.С. Резникову и учителю высшей категории Т.А. Козловой, а также руководителю кафедры математики Инженерного лицея НГТУ, кандидату педагогических наук, доценту кафедры инженерной математики Е.В. Подолян за полезные советы и обсуждения при написании данного пособия.

1. ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим задачу.

Найдите решение уравнения $5x = 7$.

Ответ. $x = 7/5$.

Поставим аналогичную задачу для уравнения $ax = b$. Наверняка получим ответ в виде $x = b/a$. Зададимся вопросом: всегда ли это имеет место? Поскольку произошло деление на *a*, то очевидно, что $a \neq 0$. А что получится, если $a = 0$? Какие значения принимает при этом второй параметр *b*? Такого рода вопросы возникают при исследовании уравнений, содержащих параметры.

Перейдем к геометрической интерпретации уравнения $ax = b$. Уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} y = ax; \\ y = b. \end{cases} \tag{1}$$

Графиком функции $y = b$ является прямая, параллельная оси *Ox*, пересекающая ось *Oy* в точке $(0; b)$. Графики функций $y = ax$ в зависимости от параметра *a* представляют собой семейство прямых, проходящих через начало координат, с угловым коэффициентом *a* (рис. 1). Изменению параметра *a* соответствует *вращение* прямой $y = ax$ вокруг начала координат, изменению параметра *b* соответвует *параллельный перенос* прямой $y = b$.

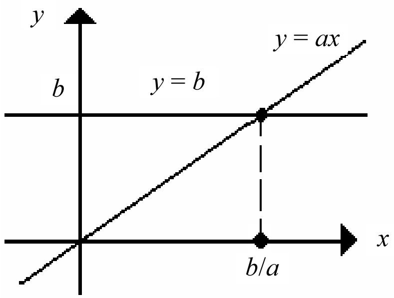

Рис. 1

Возможны следующие случаи взаимного расположения двух прямых на плоскости:

1) прямые пересекаются при $a \neq 0$. Система (1) имеет единственное решение $x = b/a$;

2) прямые параллельны и не совпадают, если $a = 0$ и $b \neq 0$. Система (1) не имеет решений $x \in \varnothing$;

3) прямые совпадают с осью Ox при $a=0,\ b=0$. Система (1) имеет беконечно много решений $x \in R$.

Рассмотренная ситуация типична для многих задач, содержащих параметр. Переход к геометрической интерпретации позволяет проследить за изменением взаимного расположения графиков при изменении параметров и сделать вывод о наличии и количестве корней или об их отсутствии.

Рассмотрим следующую задачу в общей постановке.

Исследуйте число корней уравнения $f(x,a)=g(x)$ в зависимости от параметра a.

Прежде всего термин «исследовать» означает, что нужно дать ответ на вопрос о количестве корней уравнения при тех или иных допустимых значениях параметра, входящего в уравнение.

Уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} y=f(x,a); \\ y=g(x). \end{cases} \qquad (2)$$

При переходе от уравнения к системе уравнений желательно (но не обязательно) преобразовать уравнение к такому виду, чтобы параметр содержался в одной части равенства, а другая часть $g(x)$ его не содержала. Тогда график функции $y=g(x)$ не меняется при изменении параметра a ввиду его отсутствия, и необходимо проследить только за особенностями расположения графика функции $y=f(x,a)$, содержащей параметр. При этом число корней уравнения равно числу точек пересечения графиков функций, входящих в систему (2).

Пример 1

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(x-a)^2=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ *имеет единственное решение.*

Решение. Перепишем уравнение в виде равносильной системы уравнений

$$\begin{cases} y=(x-a)^2; \\ y=\dfrac{|x-2|}{x-2}; \\ x\neq 2. \end{cases} \qquad (3)$$

Графиком функции $y=(x-a)^2$ является парабола с вершиной в точке $(a;0)$, ветви параболы направлены вверх. Для построения графика $y=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ освободимся от знака модуля, записав уравнение в виде

$$y=\begin{cases}-1, & x<2;\\ 1, & x>2.\end{cases} \tag{4}$$

Перемещая график параболы слева направо, замечаем, что критическими положениями параболы являются положения I и II (рис. 2).

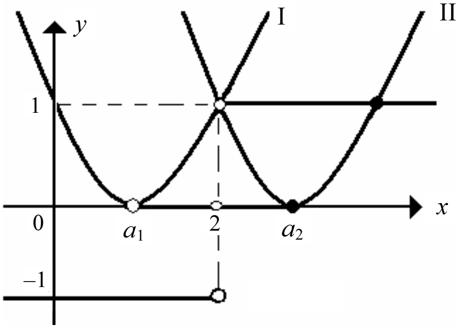

Рис. 2

В положении I и левее графики не пересекаются, поскольку точка $x=2$ не входит в область определения функции $y=\dfrac{|x-2|}{x-2}$.

В положении II графики имеют одну точку пересечения. Дальнейшее перемещение графика параболы приводит к двум точкам пересечения. Таким образом, если вершина параболы принадлежит промежутку $(a_1,a_2]$, то система (3), а следовательно, и исходное уравнение имеют единственное решение.

Вычислим искомые значения параметра a в положениях I и II, подставив координаты точки $(2;1)$ в уравнение параболы: $(2-a)^2=1$, откуда находим $a_1=1$ или $a_2=3$.

Ответ. $a \in (1;3]$.

В следующем примере рассмотрен *прием замены переменной*.

Пример 2

Исследуйте число корней уравнения $\sqrt{x+a} = \log_{1/3}(x-2a)$ *в зависимости от параметра a.*

Решение. Обращает на себя внимание то, что параметр входит в обе части уравнения и оно не приводится непосредственно к виду $f(x,a) = g(x)$. Тем не менее этого можно добиться при помощи *замены переменной*

$$t = x - 2a.$$

Уравнение запишется в виде, в котором параметр присутствует в одной части равенства

$$\sqrt{t+3a} = \log_{1/3} t.$$

Полученное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} y = \sqrt{t+3a}; \\ y = \log_{1/3} t. \end{cases} \tag{5}$$

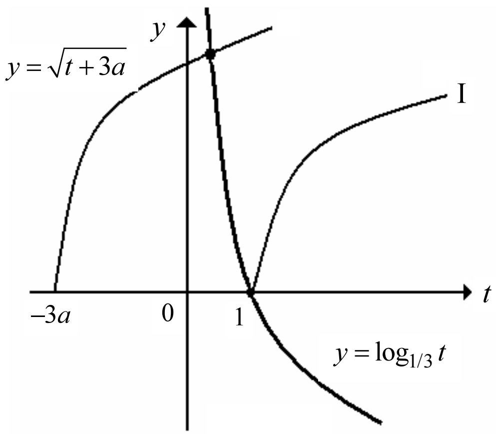

Рис. 3

Графиком функции $y=\sqrt{t+3a}$ является полупарабола (точнее, верхняя ветвь параболы, с вершиной в точке $(-3a;0)$, идущая в положительном направлении оси t). Другой график системы (5) есть график логарифмической функции с основанием 1/3 (рис. 3).

Перемещая график $y=\sqrt{t+3a}$ в положительном направлении оси t, заключаем, что критическим положением является положение I, когда вершина полупараболы совпадает с точкой $t=1$. При дальнейшем перемещении полупараболы точек пересечения графиков нет.

Вычислим критическое значение параметра a, подставив координаты точки $(1;0)$ в уравнение $y=\sqrt{t+3a}$: $1+3a=0$, откуда $a=-1/3$.

Ответ

- при $a \geq -1/3$ уравнение имеет один корень;
- при $a < -1/3$ уравнение корней не имеет.

Еще раз обратим внимание на использованный прием, состоящий *в замене переменной*. Именно это обстоятельство позволило записать исходное уравнение в более удобном для исследования виде.

Во многих задачах встречается ситуация, когда графики функций $y=f(x,a)$ и $y=g(x,a)$ при некотором значении параметра касаются друг друга в некоторой точке $x=x_0$. Математически это выражается условиями:

$$\begin{cases} f(x_0,a)=g(x_0,a); \\ f'(x_0,a)=g'(x_0,a). \end{cases} \tag{6}$$

Первое уравнение системы (6) выражает равенство ординаты графиков в точке касания. Второе уравнение системы (6) выражает равенство углового коэффициента касательной, поскольку значение производной в точке касания $x=x_0$ есть угловой коэффициент касательной к кривой в этой точке (рис. 4).

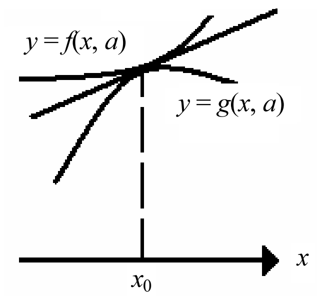

Рис. 4

Пример 3

Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2+2x+|x-a|>3$ *выполняется при всех значениях x.*

Решение. Запишем неравенство в виде

$$|x-a|>3-2x-x^2.$$

Обозначим $f(x,a)=\left|x-a\right|$; $g(x)=3-2x-x^2$.

Получаем неравенство

$$f(x,a)>g(x).$$

Геометрически неравенство означает, что график функции $y=f(x,a)$ расположен выше графика функции $y=g(x)$. График функции $y=f(x,a)$ есть прямой угол, симметричный относительно вертикальной прямой $x=a$, с вершиной в точке $(a;0)$, перемещающийся по оси *Ox* (рис. 5).

Графиком функции $y=g(x)$ является парабола, ветви которой направлены вниз, пересекающая ось *Ox* в точках (–3;0) и (1;0) (рис. 5).

Перемещая график функции $f(x,a)=|x-a|$ вправо, что соответствует увеличению параметра *a*, получим критические положения I и II, когда сначала правая часть «угла», а затем левая часть «угла» касаются графика параболы в некоторых точках x_1, x_2, и вместо неравенства получим равенство значений $f(x,a)=g(x)$ при $x=x_i$, $i=1,2$ (рис. 5). Таким образом, если $a<a_1$ или $a>a_2$, то неравенство выполняется при всех значениях *x*, как и требуется в задаче.

Вычислим критические значения a_1, a_2 параметра *a*, записав условия касания (6).

Вычислим производную $(3-2x-x^2)'=-2-2x$.

Положение I:

$$\begin{cases} x_1-a_1=3-2x_1-x_1^2; \\ 1=-2-2x_1; \\ x_1>a_1. \end{cases}$$

Положение II:

$$\begin{cases} a_2-x_2=3-2x_2-x_2^2; \\ -1=-2-2x_2; \\ x_2<a_2. \end{cases}$$

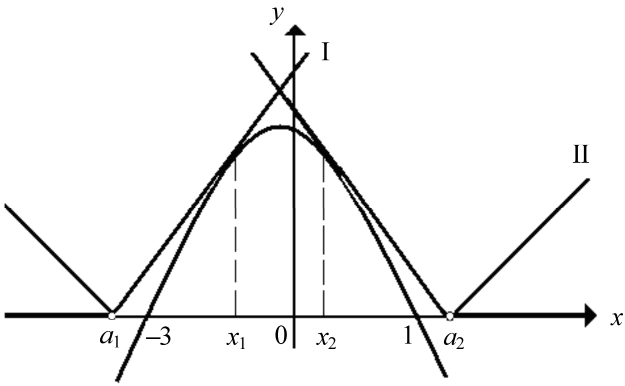

Рис. 5

Опуская выкладки, получим

$$\begin{cases} x_1 = -3/2; \\ a_1 = -21/4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -1/2; \\ a_2 = 13/4. \end{cases}$$

Ответ. $a \in (-\infty, -21/4) \cup (13/4, +\infty)$.

Замечание. При нахождении критических значений параметра a можно обойтись и без привлечения производной. Рассмотрим, например, положение I. Касание означает, что уравнение $x - a_1 = 3 - 2x - x^2$ имеет *единственное* решение $x = x_1$. Полученное уравнение является квадратным относительно x, поэтому его дискриминант $D = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$ обращается в нуль.

Вычисления дают:

$$x^2 + 3x - (a_1 + 3) = 0\,; \quad D = 4a_1 + 21 = 0\,; \quad a_1 = -21/4\,.$$

Аналогично и для положения II.

Ниже (см. пример 16) эта задача будет решена другим способом − *методом областей*.

Пример 4

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $e^{x+a+3} + x^2 \le a - 3x$ *имеет единственное решение.*

Решение. Пусть $f(x,a)=e^{x+a+3}$; $g(x,a)=a-3x-x^2$.

Получим неравенство $f(x,a)\le g(x,a)$.

Неравенство имеет единственное решение, если графики функций касаются друг друга в некоторой точке x_0 (рис. 6).

Запишем условия касания (6), вычислив производные

$$f'(x,a)=e^{x+a+3};\qquad g'(x,a)=-3-2x:$$

$$\begin{cases} e^{x_0+a+3}=a-3x_0-x_0^2; \\ e^{x_0+a+3}=-3-2x_0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x_0^2+x_0-3; \\ e^{x_0^2+2x_0}=-3-2x_0. \end{cases}$$

Подбором находим решение второго уравнения системы: $x_0=-2$, откуда $a=-1$.

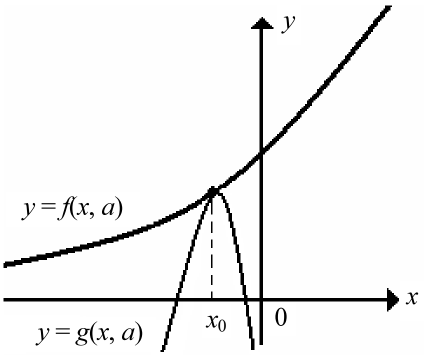

Рис. 6

Функция $y=e^{x+a+3}$ является возрастающей при всех значениях параметра, функция $y=-3-2x$ – убывающей. Следовательно, уравнение $e^{x+a+3}=-3-2x$ имеет не более одного корня. Значит, найденное подбором значение $x_0=-2$ является единственным корнем.

Ответ. $a=-1$.

Пример 5

Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2-(a+1)x-3a<0$ *при любом значении* $a\in(1;2)$.

Решение. Пусть $f(x,a)=(2a-1)x^2-(a+1)x-3a$. Данная функция – квадратный трехчлен относительно *x*. Относительно *a* функция является линейной: $f(x,a)=a(2x^2-x-3)-(x^2+x)$.

Перейдем в систему координат (a,y).

$$a(2x^2-x-3)-(x^2+x)<0.$$

Неравенство в интервале $1<a<2$ имеет решение относительно *x* тогда и только тогда, когда график линейной функции $f(x,a)$ находится не выше графика этой функции в положении I или II (рис. 7). Следовательно, выполнены необходимые условия.

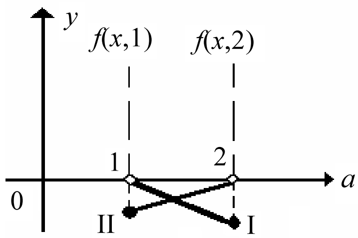

Рис. 7

Положение I:

$$\begin{cases} f(x,1)\le 0; \\ f(x,2)<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2x-3\le 0; \\ 3x^2-3x-6<0; \end{cases}$$

Положение II:

$$\begin{cases} f(x,1)<0; \\ f(x,2)\le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2x-3<0; \\ 3x^2-3x-6\le 0. \end{cases}$$

Решая полученные неравенства стандартным методом интервалов, получим

$$\begin{cases} (x-3)(x+1)\le 0; \\ (x-2)(x+1)<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-3)(x+1)<0; \\ (x-2)(x+1)\le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1\le x\le 3; \\ -1<x<2; \end{cases} \qquad \begin{cases} -1<x<3; \\ -1\le x\le 2; \end{cases}$$

$$-1<x<2; \qquad -1<x\le 2.$$

Взяв объединение полученных множеств, окончательно запишем

$$\left[\begin{array}{l} -1 < x < 2, \\ -1 < x \le 2, \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 < x \le 2 .$$

Ответ. $x \in (-1; 2]$.

Пример 6

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\frac{5}{x+1} = a|x-4|$ *на промежутке* $[0; +\infty)$ *имеет более двух корней.*

Решение. Данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} y = a|x-4|; \\ y = \frac{5}{x+1}. \end{cases}$$

Полученную систему необходимо исследовать на промежутке $x \in [0; +\infty)$.

Графиком функции $y = g(x) = \frac{5}{x+1}$ при $x \ge 0$ является часть гиперболы с центром в точке $(-1; 0)$ и вертикальной асимптотой $x = -1$.

Графиком функции $y = f(x, a) = a|x-4|$ является «уголок» с вершиной в точке $(4; 0)$, симметричный относительно вертикальной прямой $x = 4$. Раствор «уголка» зависит от углового коэффициента a: при возрастании параметра a стороны «уголка» сближаются и раствор «уголка» уменьшается (рис. 8).

При $a \le 0$ график «уголка» $y = a|x-4|$ находится не выше оси Ox, а график гиперболы расположен выше оси Ox. Следовательно, при $a \le 0$ точек пересечения графиков нет, поэтому уравнение $f(x, a) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $x \in [0; +\infty)$.

При увеличении параметра a заключаем, что критическими положениями «уголка» являются положения I и II, когда левая часть «уголка» сначала касается гиперболы в некоторой точке x_0 (положение I), а затем пересекает гиперболу в точке $(0; 5)$ (положение II). При этом если «уголок» занимает положение между I и II, то получится более двух точек пересечения, абсциссы которых принадлежат проме-жутку $[0;+\infty)$. При дальнейшем увеличении параметра a (положение III) вновь получаем две точки пересечения на рассматриваемом промежутке $[0;+\infty)$. Вычислим критические значения a_1, a_2 параметра. a

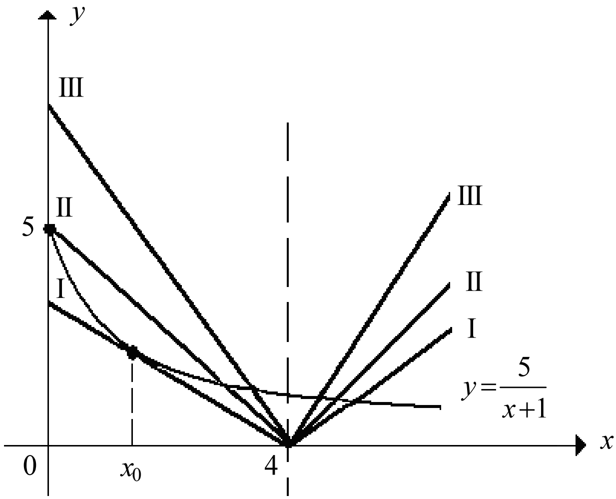

Рис. 8

В положении I (касание гиперболы и левой части «уголка») уравнение:

$$\frac{5}{x+1}=a_1(4-x)$$

имеет единственное решение x_0. Относительно x оно является квадратным, поэтому его дискриминант равен нулю:

$$x^2-3x-4+\frac{5}{a_1}=0\,;\quad D=25-\frac{20}{a_1}=0\,;\quad a_1=\frac{4}{5}\,.$$

В положении II точка $(0;5)$ – общая для гиперболы и «уголка» и уравнение примет вид

$$\frac{5}{0+1}=a_2(4-0)\,,\quad a_2=\frac{5}{4}\,.$$

Таким образом, уравнение

$$\frac{5}{x+1}=a\,|\,x-4\,|$$

на промежутке $[0;+\infty)$ имеет следующее количество корней:

- нет корней, если $a\le 0$;
- один корень, если $0<a<\frac{4}{5}$;
- два корня, если $a=\frac{4}{5}$ и $a>\frac{5}{4}$;
- три корня, если $\frac{4}{5}<a\le\frac{5}{4}$.

Ответ. $\frac{4}{5}<a\le\frac{5}{4}$.

Пример 7

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-3)^2=4;\\ y=|\,x-a\,|+1\end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. Первое уравнение системы на плоскости (x,y) задает окружность с центром в точке $(3;3)$ радиусом 2. Второе уравнение задает прямой угол с вершиной в точке $(a;1)$, симметричный относительно прямой $x=a$, перемещающийся по прямой $y=1$ (рис. 9). Перемещая вершину угла по этой прямой, заключаем, что ровно три общие точки окружность и угол имеют в трех случаях – положениях I, II и III (рис. 9).

В положениях I и III одна из сторон угла касается окружности, а другая пересекает окружность в двух точках.

В положении II вершина прямого угла лежит в точке касания прямой $y=1$ с окружностью, а его стороны пересекают окружность в двух точках. Очевидно, что это условие выполняются при $a=3$, которое находится без всяких вычислений.

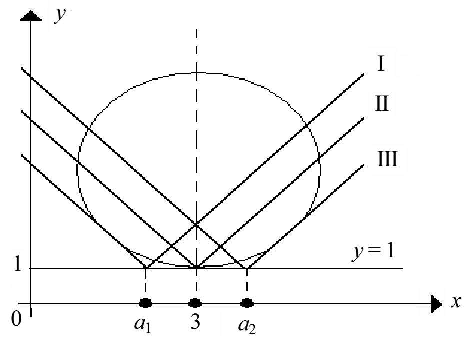

Рис. 9

Рассмотрим положение I, когда левая часть угла касается окружности.

В этом случае система уравнений для определения параметра a_1 имеет вид

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4; \\ y = a_1 - x + 1; \\ a_1 < 3, \end{cases}$$

причем она имеет единственное решение. Исключая неизвестное y, получим после некоторых преобразований квадратное уравнение относительно x:

$$2x^2 - 2x(a_1 + 1) + a_1^2 - 4a_1 + 9 = 0 .$$

В силу единственности решения дискриминант должен равняться нулю:

$$D = -4(a_1^2 - 10a_1 + 17) = 0 .$$

Решение полученного уравнения имеет вид $a_1 = 5 - 2\sqrt{2}$ или $a_1 = 5 + 2\sqrt{2}$. Учитывая, что $a_1 < 3$, получим $a_1 = 5 - 2\sqrt{2}$. В силу симметрии относительно вертикальной прямой $x = 3$ получаем еще одно значение параметра:

$$a_2 = 3 + (3 - a_1) = 6 - 5 + 2\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} .$$

Ответ. $5 - 2\sqrt{2}$; 3; $1 + 2\sqrt{2}$.

Пример 8

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos\sqrt{a^2 - x^2} = 1$ *имеет ровно восемь корней.*

Решение. Решая тригонометрическое уравнение, получим равносильное уравнение

$$\cos\sqrt{a^2 - x^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi n, \quad n \in Z .$$

Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной, и, следовательно, параметр n принимает целые неотрицательные значения. Запишем равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} y = \sqrt{a^2 - x^2}; \\ y = 2\pi n, \qquad n \in N_0 = \{0\} \cup N. \end{cases}$$

В полученной системе присутствуют два параметра – a и n.

Применим графический метод.

Графики функций $y = 2\pi n$ при различных неотрицательных значениях параметра $n \in N_0$ образуют семейство прямых, параллельных оси Ox.

Графики функций $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ образуют семейство верхних полуокружностей радиусом $R = |a|$ с центром в начале координат (рис. 10).

Полуокружность имеет с каждой прямой одну (в случае касания) или две точки пересечения. Критическими являются положения I и II.

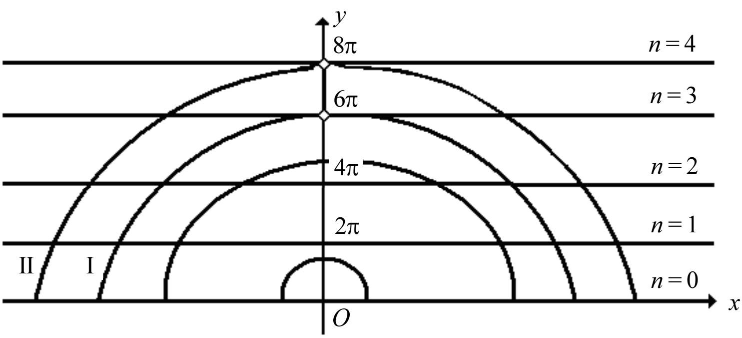

Рис. 10

В положении I будет семь точек пересечения, а в положении II – девять точек. Следовательно, чтобы было восемь точек пересечения, как и требуется в задаче, радиус полуокружности должен удовлетворять неравенству

$$6\pi < |a| < 8\pi \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 6\pi < a < 8\pi; \\ -8\pi < a < -6\pi. \end{array}\right.$$

Ответ. $a \in (-8\pi, -6\pi) \cup (6\pi, 8\pi)$.

Пример 9

Известно, что уравнение

$$(2p+3)x^2 + (p+3)x + 1 = 0 \tag{7}$$

имеет хотя бы один корень. Найдите все значения параметра p, при которых число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения

$$\frac{2x+1}{21-p} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+3}. \tag{8}$$

Решение. Определим число корней уравнения (8), записав равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x+1}{21-p}; \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}+3}. \end{cases}$$

Функция $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}+3}$ определена при $x \in [3; +\infty)$, непрерывна, положительна, монотонно убывает и стремится к нулю при $x \to +\infty$. Максимальное значение $g(x)$ принимает при $x = 3$: $g(3) = 1/3$ (рис. 11).

Графиком функции $f(x,p) = \dfrac{2x+1}{21-p}$ является прямая, проходящая через точку $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$, с угловым коэффициентом, равным $\dfrac{2}{21-p}$, $p \neq 21$.

Уравнение $f(x,p)=g(x)$ имеет не более одного корня, причем если график $y=f(x,p)$ попадает в сектор между осью Ox и положением I, то будут ровно одна точка пересечения графиков и, следовательно, ровно один корень (рис. 11).

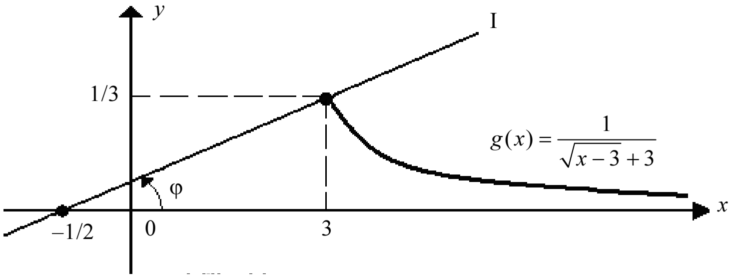

Рис. 11

Угловой коэффициент прямой при этом удовлетворяет неравенству

$$0<\frac{2}{21-p}\le \operatorname{tg}\varphi, \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{1/3}{3+1/2}=\frac{2}{21}.$$

Итак, если параметр p удовлетворяет неравенству

$$0<\frac{2}{21-p}\le\frac{2}{21},$$

то уравнение (8) имеет ровно один корень.

Уравнение (7) по условию имеет хотя бы один корень и является квадратным, если $2p+3\ne 0$, или линейным, если $2p+3=0$ и $p+3\ne 0$.

Таким образом, требование задачи выполнено, если

$$\text{а)}\ \begin{cases} 2p+3\ne 0, \\ (p+3)^2-4(2p+3)=0, \\ 0<\dfrac{2}{21-p}\le\dfrac{2}{21}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\ne -3/2, \\ (p-3)(p+1)=0, \\ 0<\dfrac{2}{21-p}\le\dfrac{2}{21}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \neq -3/2, \\ \left[\begin{array}{l} p = 3, \\ p = -1, \end{array}\right. \\ 0 < \dfrac{2}{21-p} \leq \dfrac{2}{21}; \end{cases} \Leftrightarrow \quad p = -1.$$

б) $$\begin{cases} 2p + 3 = 0, \\ p + 3 \neq 0, \\ 0 < \dfrac{2}{21-p} \leq \dfrac{2}{21}; \end{cases} \Leftrightarrow \quad p = -3/2.$$

Ответ. $p = -1$, $p = -1{,}5$.

Пример 10

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $2\sqrt{a-2x} = x^2 - a$ *имеет ровно два различных корня.*

Решение. Запишем уравнение в виде равносильной системы

$$\begin{cases} y = x^2; \\ y = a + 2\sqrt{a-2x}. \end{cases}$$

Применим графический способ. Графиком функции $y = x^2$ является парабола. Графиком функции $y = a + 2\sqrt{a-2x}$ является полупарабола с вершиной в точке $(a/2; a)$, расположенной на прямой $y = 2x$, ветвь которой направлена в отрицательном направлении оси Ox (рис. 12). Критическими являются положение I (касание полупараболы и параболы); положение II (вершина полупараболы находится в точке $(0;0)$); положение III (вершина полупараболы находится в точке пересечения прямой $y = 2x$ и параболы $y = x^2$) (рис. 12).

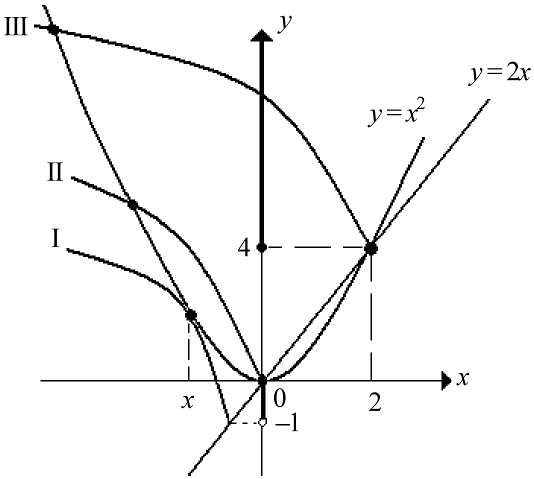

Рис. 12

Очевидно, что в положении II $a = 0$, в положении III $a = 4$.
В положении I запишем условия касания (6), поскольку производные
$(x^2)' = 2x$, $(a + 2\sqrt{a - 2x})' = \dfrac{-2}{\sqrt{a - 2x}}$:

$$\begin{cases} x^2 = a + 2\sqrt{a - 2x}, \\ 2x = \dfrac{-2}{\sqrt{a - 2x}}, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x^2 + \dfrac{2}{x}, \\ x = \dfrac{-1}{\sqrt{a - 2x}}, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x^2 + \dfrac{2}{x}, \\ (x-1)^3(x+1) = 0, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ. $a \in (-1; 0] \cup [4; +\infty)$.

Пример 11

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$f(x,a) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$$

имеет более двух точек экстремума.

Решение 1. Раскрыв модуль и выделив полный квадрат, запишем $f(x,a)$ в виде

$$f(x,a) = \begin{cases} (x-3)^2 - 9 - 2a^2 \text{ при } x \le a^2; \\ (x-5)^2 - 25 + 2a^2 \text{ при } x \ge a^2. \end{cases}$$

Схематично графики представлены на рис. 13 в зависимости от расположения точки $x = a^2$ относительно точек $x = 3$ и $x = 5$.

Из анализа графиков заключаем, что функция $f(x,a)$ имеет более двух точек экстремума тогда и только тогда, когда в точке $x = a^2$ функция имеет максимум. Следовательно, параметр a удовлетворяет неравенству

$$3 < a^2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}.$$

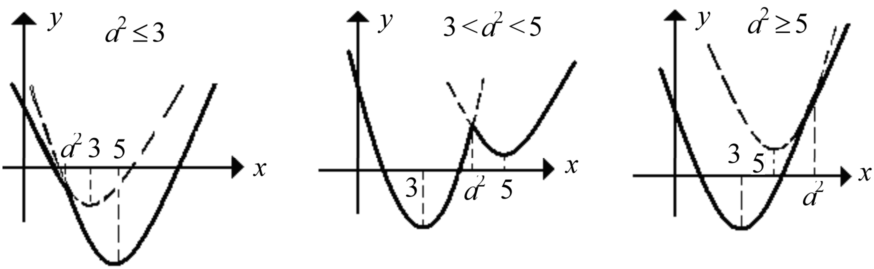

Рис. 13

Ответ. $a \in (-\sqrt{5}; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{5})$.

***Решение 2* (*аналитическое*).** Раскрыв модуль и выделив полный квадрат, запишем $f(x,a)$ в виде

$$f(x,a)=\begin{cases}(x-3)^2-9-2a^2\ , & x\le a^2;\\ (x-5)^2-25+2a^2, & x\ge a^2.\end{cases}$$

Функцию $f(x,a)$ нужно исследовать на экстремум и определить их количество. Для этого необходимо найти точки возможного экстремума. Таковыми являются точки, в которых производная или равна нулю, или не существует, или обращается в бесконечность.

Вычислим производную $f'(x,a)$

$$f'(x,a)=\begin{cases}2(x-3), & x<a^2;\\ 2(x-5), & x>a^2.\end{cases}$$

Приравнивая производную к нулю, находим точки возможного экстремума

$$f'(x,a)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3,\ \text{если } 3<a^2;\\ x=5,\ \text{если } 5>a^2.\end{array}\right.$$

При переходе через точку $x=a^2$ меняется аналитическое выражение функции $f(x,a)$, поэтому точка $x=a^2$ также включается в число точек возможного экстремума, поскольку в этой точке производная может не существовать.

Исследуем смену знака производной $f'(x,a)$ в зависимости от расположения точки $x=a^2$ (рис. 14).

1. Пусть $a^2\le 3$ (рис. 14).

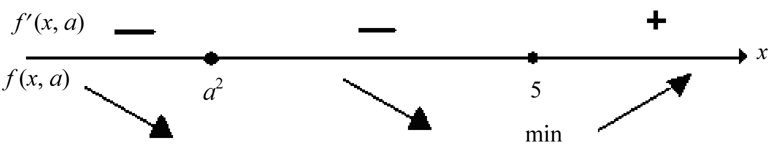

Рис. 14

Вывод. Функция не имеет более двух точек экстремума.

2. Пусть $a^2 \geq 5$ (рис. 15).

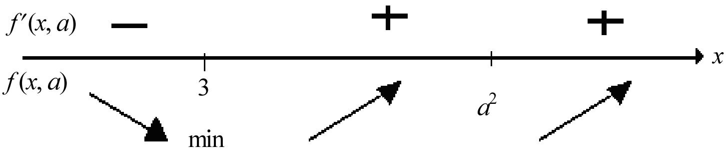

Рис. 15

Вывод. Функция не имеет более двух точек экстремума.

3. Пусть $3 < a^2 < 5$ (рис. 16).

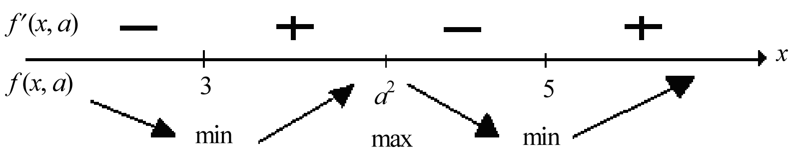

Рис. 16

Вывод. Функция имеет более двух точек экстремума, как и требуется в задаче.

Таким образом, получаем неравенство на параметр a:

$$3 < a^2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}.$$

Ответ. $a \in (-\sqrt{5}; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{5})$.

Дадим некоторый комментарий к решениям.

В решении 1 именно анализ построенных эскизов графика $f(x,a)$ позволил сразу выявить случай, когда в точке $x = a^2$ имеется максимум.

Решение 2 основано на применении необходимых и достаточных условий существования экстремума функции.

Пример 12

Найдите все значения параметра a*, при каждом из которых наименьшее значение функции* $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ *больше единицы.*

Решение 1

1. Функция $f(x)$ имеет следующий вид:

а) при $x^2 - 8x + 7 \geq 0$: $f(x) = x^2 + 2(a-4)x + 7$, а ее график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4 - a$.

б) при $x^2 - 8x + 7 \leq 0$: $f(x) = -x^2 + 2(a+4)x - 7$, а ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все возможные виды графика $f(x)$ показаны на рис. 17.

2. Наименьшее значение функция $f(x)$ может принять только в точках $x = 1$ и $x = 7$, а если $4 - a \notin [1; 7]$, то в точке $x = 4 - a$ (рис. 17, *в*, *г*).

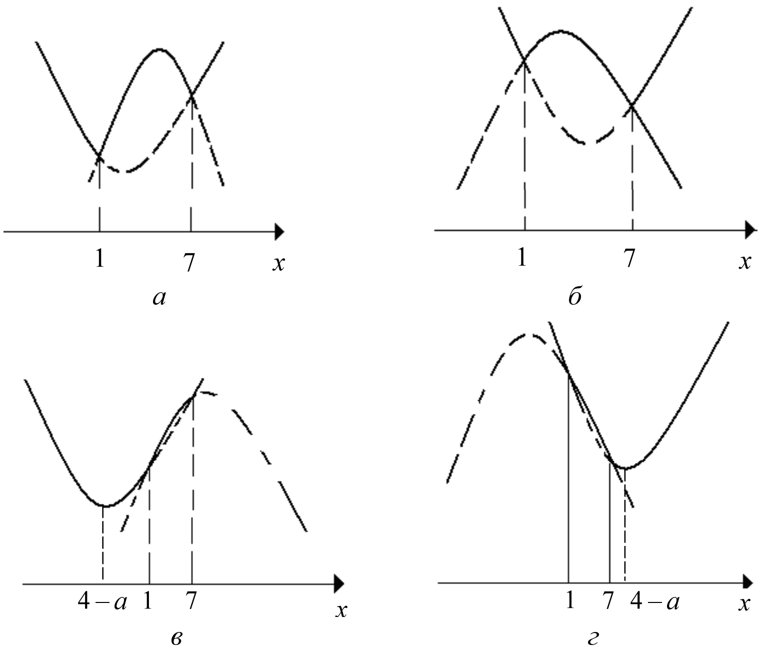

Рис. 17

3. Наименьшее значение функции $f(x)$ больше единицы тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1)>1, \\ f(7)>1, \\ f(4-a)>1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a>1, \\ 14a>1, \\ 2a(4-a)+|a^2-9|>1; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\ge 3, \\ a^2-8a+10<0; \end{cases} \\ \begin{cases} 1/2<a<3, \\ 3a^2-8a-8<0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\ge 3, \\ 4-\sqrt{6}<a<4+\sqrt{6}, \end{cases} \\ \begin{cases} 1/2<a<3, \\ \dfrac{4-\sqrt{40}}{3}<a<\dfrac{4+\sqrt{40}}{3}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\le a<4+\sqrt{6}, \\ 1/2<a<3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1/2<a<4+\sqrt{6}\,.$$

Ответ. $\left(1/2;\ 4+\sqrt{6}\right)$.

Решение 2. Применим графический метод. Поскольку $f(x)\ge$ $\ge f_{\min}(x_0)>1$, то получим равносильную формулировку: неравенство $2ax>1-|x^2-8x+7|$ должно выполняться *для всех* x.

Обозначим $g(x)=1-|x^2-8x+7|$. Получим неравенство $2ax>g(x)$. Функцию $y=g(x)$ можно записать в виде $g(x)=1-|(x-1)(x-7)|$. График этой функции представлен на рис. 18.

Критическими являются положение I, когда прямая $y=2ax$ проходит через точку (1;1), и положение II, когда прямая и парабола касаются друг друга (рис. 18). Вычислим критические значения параметра.

Положение I: $2a_1\cdot 1=1$, $a_1=\dfrac{1}{2}$.

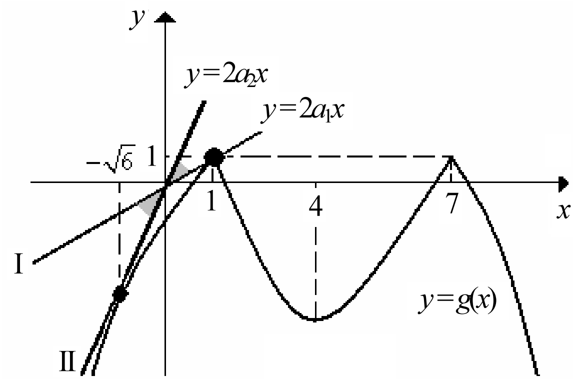

Рис. 18

Положение II:

Учитывая, что $(2ax)' = 2a$, $g'(x) = -2x + 8$, условия касания (6) запишутся в следующем виде:

$$\begin{cases} 2ax = 1 - (x-1)(x-7), \\ 2a = -2x + 8, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4-x)x = -x^2 + 8x - 6, \\ a = 4 - x, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 6, \\ a = 4 - x, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{6}, \\ a = 4 - x, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 4 + \sqrt{6}, \\ x = -\sqrt{6}. \end{cases}$$

Если прямая $y = 2ax$ попадает в сектор между положениями I и II, т. е. если $a_1 < a < a_2$, то неравенство $2ax > g(x)$ будет выполняться при всех x.

Ответ. $1/2 < a < 4 + \sqrt{6}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ (ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД)

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x+a|=\dfrac{x-5}{|x-5|}$ имеет единственное решение.

Ответ. $[-6;-4)$.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2+(a-5)^2=|x+5-a|+|x+a-5|$ имеет единственное решение.

Ответ. 3; 7.

Указание. Выполните замену $b=a-5$. Покажите, что если $x_0 \neq 0$ – решение, то $-x_0$ также является решением.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$4x-|3x-|x+a||=9|x-1|$ не имеет решений.

Ответ. (0;11).

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x|x-4a|+a=1$ имеет три решения.

Ответ. $\left(\dfrac{\sqrt{17}-1}{8};1\right)$.

5. Найдите все значения параметра a, для которых неравенство $(a^2+a+1)x+a \geq 0$ верно для каждого $a \leq 1$.

Ответ. $[1;+\infty)$.

Указание. Сведите задачу к решению системы $\begin{cases} x \geq -\dfrac{a}{a^2+a+1}, \\ a \leq 1. \end{cases}$

Найдите наибольшее значение функции $f(a)=-\dfrac{a}{a^2+a+1}$ на промежутке $a \in (-\infty;1]$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение фукции $f(x) = 4ax + |x^2 - 4x + 3|$ меньше –2.

Ответ. $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1; +\infty\right)$.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение фукции $f(x) = 2ax + |x^2 - 6x + 8|$ меньше -1.

Ответ. $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right) \cup (6; +\infty)$.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение фукции $f(x) = 4|x + a| + |x^2 + 2x - 3|$ больше 4.

Ответ. $a \in (-\infty; +\infty)$.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБЛАСТЕЙ К РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

Пусть требуется решить неравенство (или систему неравенств), содержащее параметр: $f(x,a) \geq 0$.

При решении задачи *методом областей* в отличие от *метода интервалов* будем изображать точки, имеющие не одну, а две координаты (x,a) не на прямой, а на координатной плоскости (x,a).

1. Сначала изобразим все кривые, при переходе через которые левая часть исходного неравенства в принципе может поменять знак или потерять смысл. Эти кривые разбивают всю плоскость на области.

2. Выбираем те области, точки которых удовлетворяют исходному неравенству. При этом граница выбранных областей изображается сплошной линией, если ее точки удовлетворяют неравенству, и прерывистой, если не удовлетворяют.

3. Конкретный знак можно определить с помощью рассуждения, присущего методу областей:

- определяем знак в наиболее простой области, например где все множители, входящие в неравенство, положительны, а значит, заведомо положительно и их произведение.
- Знаки в остальных областях определяются последовательными переходами от одной области к другой, соседней с ней по граничной линии. При этом, как правило, меняется знак одного из сомножителей, а значит, меняется и знак всего произведения.

Знак в области можно определить и с помощью подстановки координат контрольных точек, заведомо лежащих в каждой из получившихся областей.

4. Наконец, изучив полученный рисунок, выберем такие значения параметра, для каждого из которых выполняется требование задачи.

Пример 13

Изобразите множество решений неравенства $(ax-1)(a-x^2) \geq 0$.

Решение. Обозначим $f(x,a) = (ax-1)(a-x^2)$. Изобразим на координатной плоскости (x,a) графики функций $a = \dfrac{1}{x}$ и $a = x^2$.

Построенные графики разбиваются плоскостью на пять областей I–V (рис. 19).

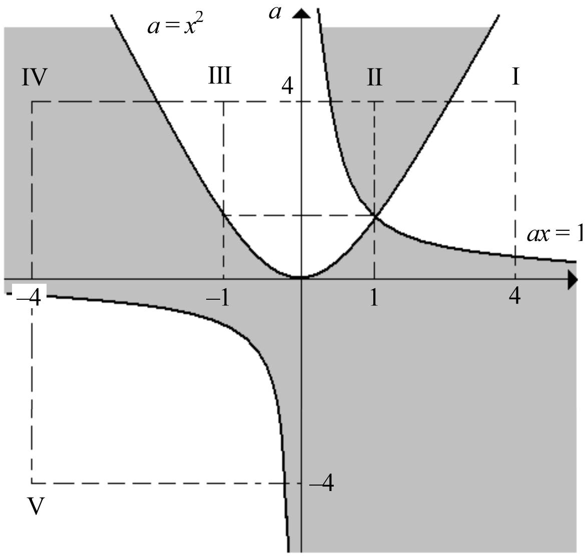

Рис. 19

Подставив координаты контрольных точек, определим знак функции $f(x,a)$ в каждой области.

В области I контрольная точка (4;4): $f(4;4)=(4\cdot 4-1)(4-4^2)<0$.

В области II контрольная точка (1;4): $f(1;4)=(4\cdot 1-1)(4-1^2)>0$.

В области III контрольная точка (–1;4):

$$f(-1;4)=(4(-1)-1)(4-(-1)^2)<0\ .$$

В области IV контрольная точка (–4;4):

$$f(4;4)=(4(-4)-1)(4-(-4)^2)>0\,.$$

В области V контрольная точка (–4;–4):

$$f(-4;-4)=((-4)(-4)-1)(-4-(-4)^2)<0\,.$$

В областях II, IV $f(x,a)$ принимает неотрицательные значения. На рис. 19 эти области закрашены.

Пример 14

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(x-a)(x^2-ax+5x-2a^2-a+6)>0;\\ x^2+a^2=36\end{cases}$$

имеет решение.

Решение. Особенностью системы является наличие уравнения и неравенства. Найдем корни второго сомножителя в неравенстве:

$$x^2+x(5-a)-2a^2-a+6=0;$$

$$D=(5-a)^2-4(-2a^2-a+6)=(3a-1)^2;$$

$$x_1=\frac{a-5+\sqrt{D}}{2}=2a-3;\ \ x_2=\frac{a-5-\sqrt{D}}{2}=-a-2.$$

Система примет вид

$$\begin{cases}(x-a)(x-2a+3)(x+a+2)>0;\\ x^2+a^2=36.\end{cases}$$

На координатной плоскости (x,a) уравнение $x^2+a^2=36$ представляет окружность с центром в начале координат радиусом 6.

Неравенство представляет собой произведение трех линейных множителей. Решим неравенство методом областей.

Как известно, прямая $Ax+Ba+C=0$ разбивает плоскость (x,a) на две полуплоскости, в одной из которых $Ax+Ba+C>0$, а в другой – $Ax+Ba+C<0$. Начертив график каждой линейной функции, входящей в неравенство, получим, что координатная плоскость (x,a) разбивается на некоторое конечное число областей, знак произведения в каждой из которых можно легко определить.

На рис. 20 области, в которых знак произведения положителен, закрашены.

Дуги AB, CA', $B'C'$ окружности попадают в указанные выше области.

Что же получилось? Любая точка $(x;a)$, попавшая на такую дугу, является решением исходной системы. Остается найти проекцию дуг на ось a.

Изучив рис. 20, заключаем, что необходимо найти координаты точки A' из решения системы:

$$\begin{cases} x+a+2=0; \\ x^2+a^2=36; \\ a<0; \end{cases} \Rightarrow \quad a=1-\sqrt{17}.$$

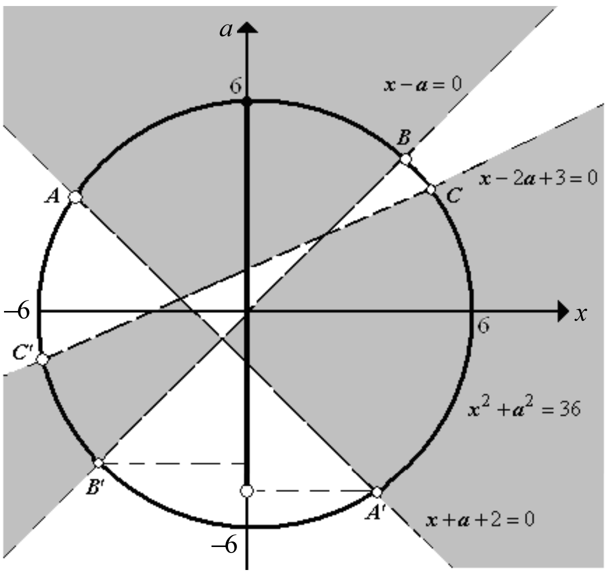

Рис. 20

Ответ. $a \in (1-\sqrt{17};6]$.

Пример 14

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(x-a)(ax-2a-3)\ge 0;\\ ax\ge 4\end{cases}$$

не имеет решений.

Решение 1. (Метод подвижных границ). Рассмотрим три случая

1. Пусть $a>0$.

Графиком функции $f(x,a)=(x-a)(ax-2a-3)$ является парабола, ветви которой направлены вверх, точки пересечения с осью Ox являются $(a;0)$ и $\left(2+\dfrac{3}{a};0\right)$.

Решением неравенства $f(x,a)\ge 0$ будут промежутки вне этих точек. Следовательно, если a – меньший корень, то $f(x,a)\ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le a,\\ x\ge 2+\dfrac{3}{a}\end{array}\right.$ (рис. 21, *а*). Если a – больший корень, то $f(x,a)\ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge a,\\ x\le 2+\dfrac{3}{a}\end{array}\right.$ (рис. 21, *б*). Решение неравенства $f(x,a)\ge 0$ можно записать в виде

$$\left[\begin{array}{l}x\ge \max\left(a,2+\dfrac{3}{a}\right);\\ x\le \min\left(a,2+\dfrac{3}{a}\right),\end{array}\right.$$

где $\max(c,d)$ (соответственно $\min(c,d)$) означает наибольшее (соответственно наименьшее) из чисел c или d (рис. 21, *в*).

Решением второго неравенства системы является $ax\ge 4 \Leftrightarrow x\ge \dfrac{4}{a}$.

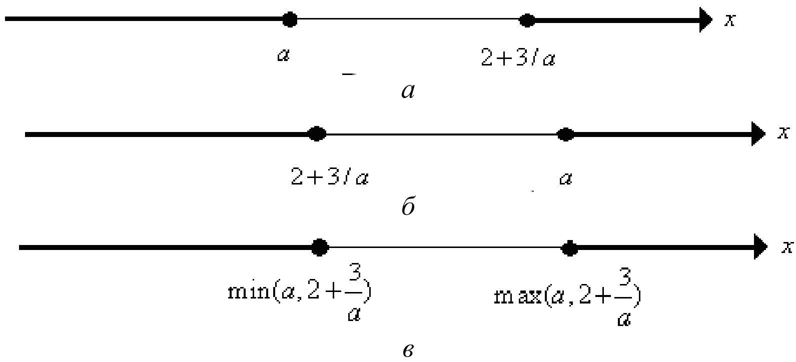

Рис. 21

Следовательно, при $x \ge \max\left(a, 2+\dfrac{3}{a}, \dfrac{4}{a}\right)$ система неравенств $\begin{cases} f(x,a) \ge 0; \\ g(x,a) \ge 0 \end{cases}$ при $a > 0$ имеет решение, и поэтому $a > 0$ не удовлетворяет условию задачи.

2. Пусть $a = 0$. В этом случае второе неравенство системы противоречиво, поскольку невозможно $-4 \ge 0$, и значит, система не имеет решений.

Следовательно, $a = 0$ удовлетворяет требованию задачи.

3. Пусть $a < 0$.

Графиком функции $f(x,a) = (x-a)(ax-2a-3)$ является парабола, ветви которой направлены вниз, точками пересечения с осью *Ox* являются $(a;0)$ и $\left(2+\dfrac{3}{a};0\right)$. Следовательно, решением неравенства $f(x,a) \ge 0$ будет отрезок оси *Ox* между этими точками.

Решением второго неравенства $g(x,a) = ax - 4 \ge 0$ является множество $x \le \dfrac{4}{a}$ (поскольку $a < 0$). Следовательно, система $\begin{cases} f(x,a) \ge 0; \\ g(x,a) \ge 0 \end{cases}$ не имеет решений тогда и только тогда, когда эти множества не пересекаются.

Дальнейшие вычисления зависят от взаимного расположения корней. Получаем два случая (рис. 22):

$$\text{а)}\ \begin{cases} \dfrac{4}{a} < a \le 2 + \dfrac{3}{a}, \\ a < 0; \end{cases} \quad (a \text{ – меньший корень}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4 - a^2}{a} < 0, \\ \dfrac{a^2 - 2a - 3}{a} \le 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2-a)(2+a)}{a} < 0, \\ \dfrac{(a+1)(a-3)}{a} \le 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a < 2, \\ \left[\begin{array}{l} a \le -1, \\ a \ge 3, \end{array}\right. \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow -2 < a \le -1 .$$

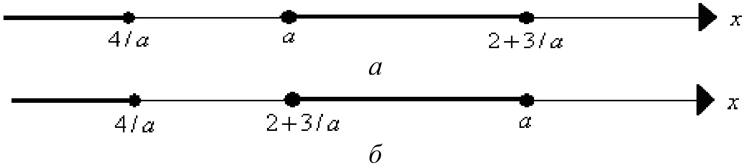

Рис. 22

$$\text{б)}\ \begin{cases} \dfrac{4}{a} < 2 + \dfrac{3}{a} \le a, \\ a < 0; \end{cases} \quad (a \text{ – больший корень}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a} < 2, \\ \dfrac{a^2 - 2a - 3}{a} \ge 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a - 1/2}{a} > 0, \\ \dfrac{(a+1)(a-3)}{a} \ge 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > 1/2, \\ a < 0, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1 \le a < 0, \\ a \ge 3, \end{array}\right. \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le a < 0 .$$

Взяв объединение полученных множеств, получим $-2 < a < 0$.

Ответ. $a \in (-2;0]$.

Решение 2

1. Как и в решении 1, устанавливаем, что при $a = 0$ система решений не имеет.

2. Пусть $a \neq 0$.

Исследование системы неравенств при $a \neq 0$ можно провести графически методом областей, если изобразить на координатной плоскости множество пар $(x;a)$, удовлетворяющих системе $\begin{cases} f(x,a) \geq 0; \\ g(x,a) \geq 0. \end{cases}$

Для этого достаточно

- изобразить на плоскости все граничные линии, на которых неравенства обращаются в равенства;
- выбрать те области, в которых выполняются все неравенства системы.

В данном примере

$$\begin{cases} f(x,a) = (x-a)(a(x-2)-3) \geq 0; \\ g(x,a) = ax - 4 \geq 0. \end{cases}$$

Граничными линиями являются прямые $a = 0$, $x - a = 0$, гиперболы $a(x-2) = 3$, $ax = 4$.

На рис. 23 множество решений системы неравенств закрашено.

Как же теперь по чертежу ответить на поставленный в задаче вопрос: найти все значения параметра, при каждом из которых система неравенств не имеет решений?

Геометрически это означает, что горизонтальная прямая $a = \mathrm{const}$ не имеет пересечений с закрашенной областью. Критическими положениями прямой являются $a = 0$, а также то, когда прямая проходит через точку A (рис. 23), координаты которой определяются из решения системы

$$\begin{cases} ax - 4 = 0, \\ x - a = 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow A(-2;-2).$$

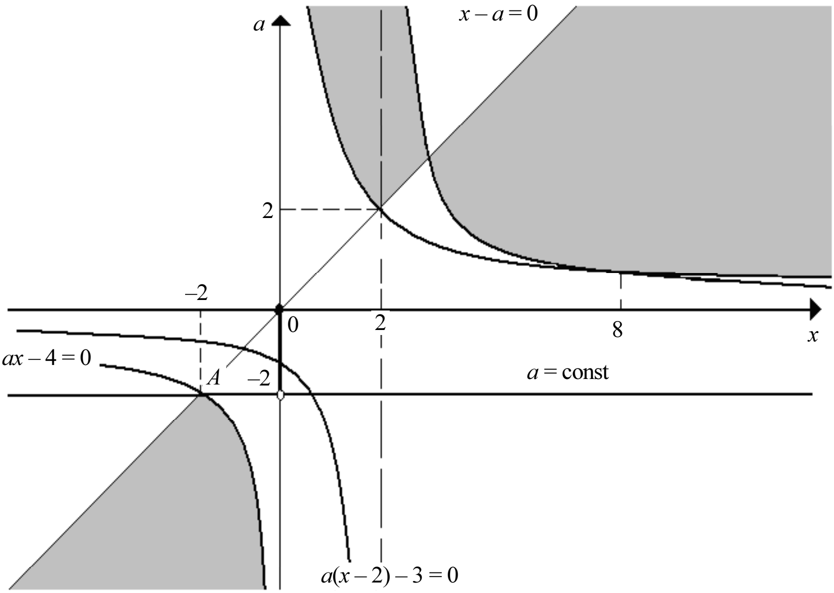

Рис. 23

Следовательно, $a \in (-2;0)$. Учитывая, что при $a = 0$ система не имеет решений, окончательно запишем ответ.

Ответ. $a \in (-2;0]$.

Пример 16

Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 + 2x + |x - a| > 3$ *выполняется при всех значениях* x.

Решение. Этот пример был ранее решен (см. пример 3) графическим методом.

Решим его методом областей. Раскрывая модуль, запишем $f(x,a)$ в виде

$$f(x,a) = \begin{cases} -a + x^2 + 3x - 3, & x \geq a; \\ a + x^2 + x - 3, & x \leq a. \end{cases}$$

Выделяя полный квадрат, запишем $f(x,a)$ в виде

$$f(x,a)=\begin{cases} -a-\dfrac{21}{4}+\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2, & x\ge a;\\ a-\dfrac{13}{4}+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2, & x\le a. \end{cases}$$

Неравенство $f(x,a)>0$ равносильно системе неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -a-\dfrac{21}{4}+\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2>0;\\ x-a\ge 0; \end{cases}\\ \begin{cases} a-\dfrac{13}{4}+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2>0;\\ x-a\le 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Изобразим граничные линии на координатной плоскости (x,a):

$$x-a=0;\quad a=x^2+3x-3;\quad a=3-x-x^2.$$

Области, в которых $f(x,a)>0$, закрашены (рис. 24). По условию задачи неравенство справедливо для всех x. Значит, прямая $a=\text{const}$ должна полностью лежать в закрашенной области. Критическими положениями прямой $a=\text{const}$ будут те, когда прямая проходит через вершины парабол. Вычисления дают значения $a=-21/4$ и $a=13/4$, которые, как и следовало ожидать, совпадают с ранее полученными при решении примера 3.

Ответ. $a<-21/4;\ a>13/4$.

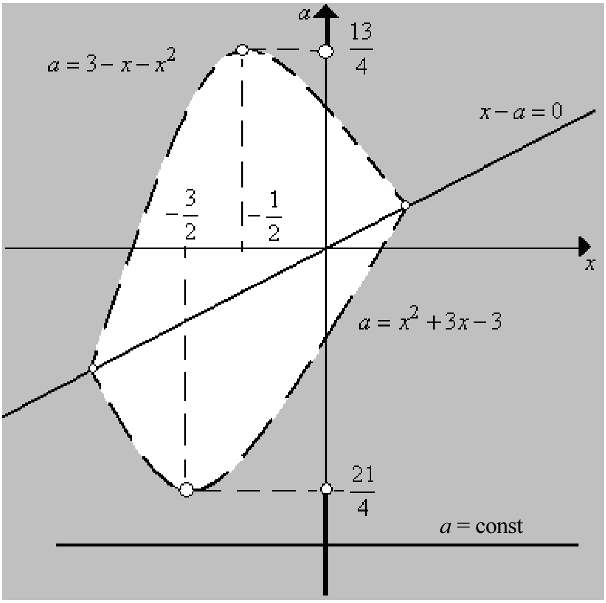

Рис. 24

Пример 17

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых неравенство

$$\left|x^2 - 4x + a\right| \le 10$$

выполняется для всех значений $x \in [a, a+5]$.

Решение. Применим метод областей. Раскрывая модуль и выделяя полный квадрат, получим систему

$$\begin{cases} -10 \le x^2 - 4x + a \le 10, \\ a \le x \le a+5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 - (x-2)^2 \le a \le 14 - (x-2)^2, \\ a \le x \le a+5. \end{cases}$$

На координатной плоскости (x, a) изобразим граничные линии прямые $a = x$, $a = x - 5$, параболы $a = 14 - (x-2)^2$, $a = -6 - (x-2)^2$.

Неравенству $a \le x \le a + 5$ удовлетворяют точки, лежащие в полосе между прямыми. Неравенству $-6 - (x-2)^2 \le a \le 14 - (x-2)^2$ удовлетворяют точки, лежащие между параболами. Системе неравенств удовлетворяют точки, лежащие в криволинейном четырехугольнике $ABCD$ (рис. 25).

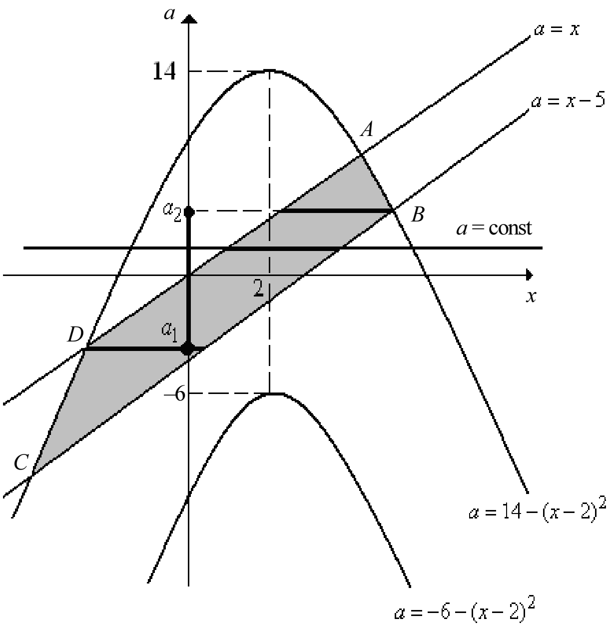

Рис. 25

Для ответа на вопрос задачи необходимо, чтобы отрезок прямой $a = \text{const}$, попадающий в полосу между $a \le x \le a + 5$ и пересекающий четырехугольник $ABCD$, целиком находился в закрашенной области. Критическими являются положения, когда прямые проходят через точки B и D.

Вычислим их координаты.

Точка B:

$$\begin{cases} a>0, \\ a=x-5, \\ a=14-(x-2)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ a=14-(a+3)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ a^2+7a-5=0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2=\frac{-7+\sqrt{69}}{2}.$$

Точка D:

$$\begin{cases} a<0, \\ a=x, \\ a=14-(x-2)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ a=14-(a-2)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ a^2-3a-10=0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=-2.$$

Ответ. $a_1 \le a \le a_2$ или $-2 \le a \le \dfrac{-7+\sqrt{69}}{2}$.

Пример 18

Найдите все положительные значения параметра a, при которых для каждого числа из отрезка $[-1;1]$ *верно неравенство* $\left|2x+a|x|-7\right| \ge 2$.

Решение 1. Рассмотрим отдельно случай $x=0$. Подставляя это значение в неравенство, данное в условии задачи, получим выражение $|-7| \ge 2$, которое, очевидно, справедливо при всех значениях $a>0$. В дальнейших преобразованиях считаем $x \ne 0$:

$$\begin{cases} \left|2x+a|x|-7\right| \ge 2, \\ -1 \le x \le 1, \\ a>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x+a|x|-7 \ge 2, \\ 2x+a|x|-7 \le -2, \end{array}\right. \\ -1 \le x \le 1, \\ a>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a|x| \ge 9-2x, \\ a|x| \le 5-2x, \end{array}\right. \\ -1 \le x \le 1, \\ a>0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geq \dfrac{9}{|x|} - 2\dfrac{x}{|x|}, \\ a \leq \dfrac{5}{|x|} - 2\dfrac{x}{|x|}, \end{array}\right. \\ -1 \leq x \leq 1,\ x \neq 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geq \begin{cases} \dfrac{9}{x} - 2, & x > 0, \\ \dfrac{-9}{x} + 2, & x < 0, \end{cases} \\ a \leq \begin{cases} \dfrac{5}{x} - 2, & x > 0, \\ \dfrac{-5}{x} + 2, & x < 0, \end{cases} \end{array}\right. \\ -1 \leq x \leq 1,\ x \neq 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geq \dfrac{9}{x} - 2, \\ a \leq \dfrac{5}{x} - 2, \end{array}\right. \\ 0 < x \leq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geq \dfrac{-9}{x} + 2, \\ a \leq \dfrac{-5}{x} + 2, \end{array}\right. \\ -1 \leq x < 0, \end{cases} \end{array}\right. \\ a > 0. \end{cases}$$

Применим метод областей. На координатной плоскости (x, a) изобразим граничные линии:

прямые $a = 0$, $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$;

гиперболы $a = \dfrac{9}{x} - 2$, $a = -\dfrac{9}{x} + 2$, $a = \dfrac{5}{x} - 2$, $a = -\dfrac{5}{x} + 2$.

Будем рисовать только ту часть графиков гипербол, которая попадает в полосу между вертикальными прямыми $x = -1$ и $x = 1$ и лежит в верхней полуплоскости $a > 0$. Точки $(x; a)$, попадающие в закрашенные области, дают решение неравенства (рис. 26).

Для ответа на вопрос задачи необходимо, чтобы часть прямой $a = \text{const}$, попадающая в полосу между $-1 \leq x \leq 1$, полностью находилась в закрашенной области.

Изучив рис. 26, заключаем, что критическими являются положения, когда прямая $a = \text{const}$ проходит через точку A или начало координат.

Вычислим координаты точки A из решения системы:

$$\begin{cases} x = 1, \\ a = \dfrac{5}{x} - 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ a = 3. \end{cases} \Rightarrow a = 3.$$

Ответ. $a \in (0; 3]$.

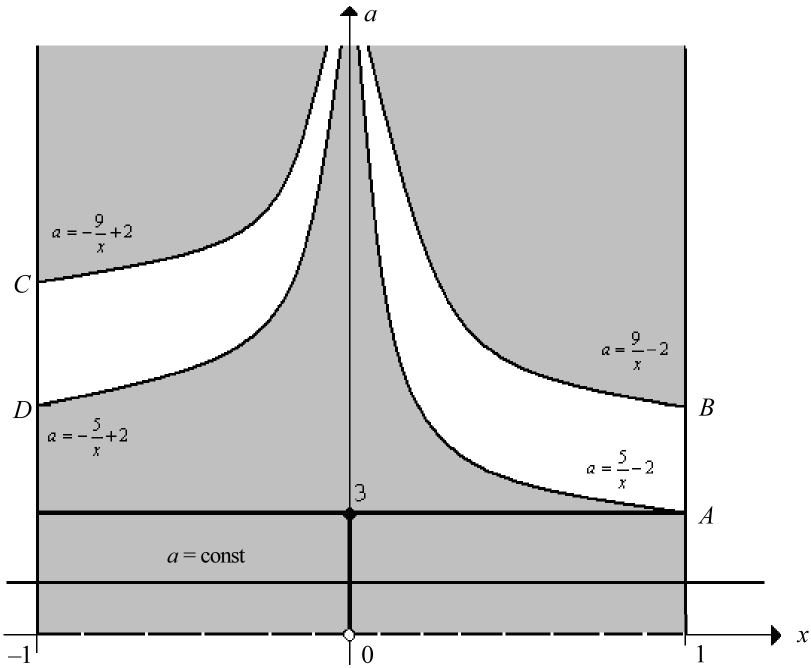

Рис. 26

Решение 2*. Для сравнения приведем решение задачи методом подвижных границ.

Рассмотрим случаи $x \geq 0$ и $x < 0$, раскрыв внутренний модуль $|x|$:

$$1)\ \begin{cases} x \geq 0, \\ |(2+a)x-7| \geq 2, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} (2+a)x-7 \geq 2, \\ (2+a)x-7 \leq -2, \end{array}\right. \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{9}{a+2}, \\ x \leq \dfrac{5}{a+2}, \end{array}\right. \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

---

* См. [3], с. 54–57.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[0; \dfrac{5}{a+2}\right] \cup \left[\dfrac{9}{a+2}; +\infty\right), \\ a > 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x < 0, \\ |(2+a)x - 7| \geq 2, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ \left[\begin{aligned} &(2-a)x \geq 9, \\ &(2-a)x \leq 5, \end{aligned}\right. \\ a > 0. \end{cases}$$

При $a = 2$ решениями будут все $x \in (-\infty; 0)$.

Решим неравенство при $a > 0,\ a \neq 2$ на интервалах $0 < a < 2$ и $a > 2$:

$$\text{а)} \begin{cases} x < 0, \\ \left[\begin{aligned} &x \geq \dfrac{9}{2-a}, \\ &x \leq \dfrac{5}{2-a}, \end{aligned}\right. \\ 0 < a < 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0), \\ 0 < a < 2. \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x < 0, \\ \left[\begin{aligned} &x \leq \dfrac{9}{2-a}, \\ &x \geq \dfrac{5}{2-a}, \end{aligned}\right. \\ a > 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \dfrac{9}{a-2}\right] \cup \left[\dfrac{5}{2-a}; 0\right), \\ 0 < a < 2. \end{cases}$$

Объединим полученные решения на оси Oa (рис. 27), а затем найдем условия, при которых отрезок $[-1;1]$ входит в полученные решения.

При $0 < a \leq 2$ решениями будут все $x \in \left(-\infty; \dfrac{5}{a+2}\right] \cup \left[\dfrac{9}{a+2}; +\infty\right)$.

При этом $2 < a \leq 4$, $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{a+2} < \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{5}{4} \leq \dfrac{5}{a+2} < \dfrac{5}{2}$.

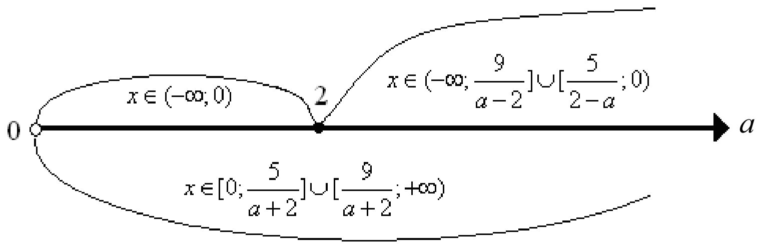

Рис. 27

Следовательно, при $2 < a \leq 4$ неравенство выполняется при любом $x \in [-1;1]$ и поэтому требование задачи при $a \in (0;2]$ выполняется (рис. 28).

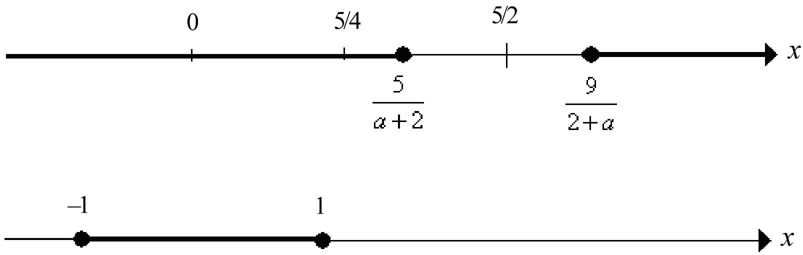

Рис. 28

При $a > 2$ решением будут все

$$x \in \left(-\infty; \frac{9}{2-a}\right] \cup \left[\frac{5}{2-a}; \frac{5}{a+2}\right] \cup \left[\frac{9}{a+2}; +\infty\right) \text{ (рис. 29).}$$

Так как при $a > 2$ концы промежутков $\frac{5}{a+2} > 0$, $\frac{5}{2-a} < 0$, и значит, для того чтобы отрезок $[-1;1]$ полностью входил в решение, необходимо, чтобы одновременно $\frac{5}{a+2} \geq 1$ и $\frac{5}{2-a} \leq -1$.

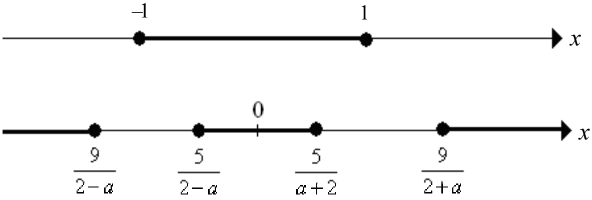

Рис. 29

Решаем систему методом интервалов (рис. 30):

$$\begin{cases} a > 2, \\ \dfrac{a-3}{a+2} \le 0, \\ \dfrac{a-7}{a-2} \le 0; \end{cases} \Rightarrow a \in (2;3].$$

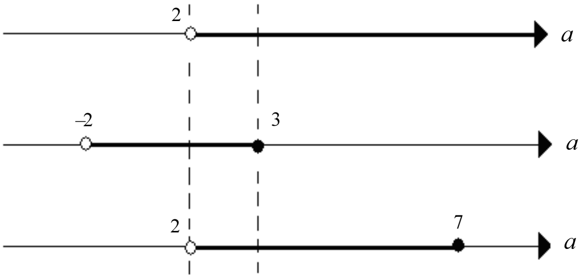

Рис. 30

Объединяя результаты обоих случаев, получаем ответ.
Ответ. $a \in (0;3]$.

Пример 19

Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $a^7 + x^{x\log_x a - 1} > a^{x-1} + \dfrac{a^8}{x}$ *содержит ровно три целых числа.*

Решение. Выпишем область допустимых значений пар (x,a):

$$\begin{cases} x>0,\ x\neq 1; \\ a>0,\ a\neq 1. \end{cases}$$

Преобразуем исходное неравенство, учитывая, что при $a>0$

$x^{x\log_x a-1}=\dfrac{a^x}{x}$, $a^y-a^x>0\Leftrightarrow(a-1)(y-x)>0$;

$\dfrac{a^7(x-a)}{x}>\dfrac{a^{x-1}(x-a)}{x}\Leftrightarrow\dfrac{(x-a)(a^7-a^{x-1})}{x}>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{(x-a)(a-1)(8-x)}{x}>0$.

Применим метод областей. Изобразим граничные линии на координатной плоскости (x,a):

$$x=0,\quad x=1,\quad x=8,\ a=0,\ a=1,\ a=x.$$

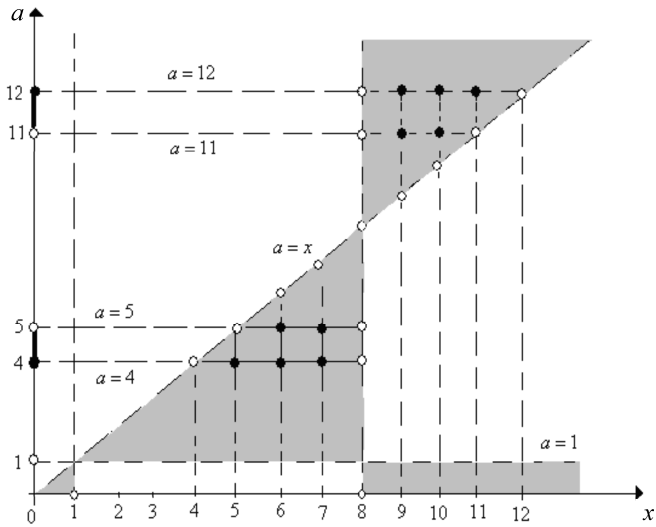

Рис. 31

Для ответа на вопрос задачи необходимо, чтобы горизонтальная прямая $a=\text{const}$ пересекала вертикальные прямые $x=n,\ n\in N$, соответствующие целым значениям x, ровно в трех точках, лежащих в закрашенной области. Изучив рис. 31, заключаем, что критическими значениями параметра являются $a=4$, $a=5$, $a=11$, $a=12$.

Ответ. $a \in [4;5) \cup (11;12]$.

Пример 20

Найдите все значения параметра p, при каждом из которых уравнение

$$x^2+(p-3)^2=|x+3-p|+|x+p-3|$$

имеет единственное решение.

***Решение 1* (*аналитическое*).** Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, если $x_0=-x_0$, т. е. $x_0=0$. Подставим значение $x=0$ в исходное уравнение: $(p-3)^2=2|p-3|$, откуда либо $p-3=0;$ $p=3$, либо $|p-3|=2$; $p=1$ или $p=5$.

При $p=3$ исходное уравнение принимает вид $x^2=2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа –2; 0; 2, т. е. исходное уравнение имеет более одного корня.

При $p=1$ или $p=5$ уравнение принимает вид $x^2+4=|x-3|+$ $+|x-3|$.

При $x<-3$ после раскрытия модулей получим уравнение $x^2+2x+4=0$, которое не имеет корней, поскольку его дискриминант отрицателен.

При $-3 \le x \le 3$ получаем уравнение $x^2=0$, которое имеет единственный корень $x=0$.

При $x>3$ получаем уравнение $x^2-2x+4=0$, которое не имеет корней.

При $p=1$ или $p=5$ исходное уравнение имеет единственный корень $x=0$.

Ответ. 1; 5.

Решение 2. Для сравнения приведем решение методом областей.

Выполним замену $a=p-3$. Уравнение запишется в виде

$$x^2+a^2=|x-a|+|x+a|.$$

На координатной плоскости (x,a) изобразим множество точек, удовлетворяющих полученному уравнению.

Очевидно, что точка $(0;0)$ удовлетворяет уравнению.

Заметим, что уравнение не меняется, если в нем заменить x на $-x$, а также a на $-a$. Это означает, что кривая симметрична относительно как оси *Ox*, так и оси *Oa*. Более того, если в уравнении поменять местами x и a, то уравнение не изменится: $a^2+x^2=|a-x|+|a+x|$.

Это означает, что кривая симметрична относительно прямой $a=x$. Поэтому достаточно изобразить кривую при $a\geq 0,\ a\leq x$, а затем последовательно выполнить отражения относительно координатных осей и прямых $a=\pm x$:

$$\begin{cases} x^2+a^2=x-a+x+a, \\ a-x\leq 0, \\ a\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+a^2=1, \\ a-x\leq 0, \\ a\geq 0. \end{cases}$$

Уравнение $(x-1)^2+a^2=1$ есть уравнение окружности с центром в точке $(1;0)$ и радиусом 1.

Учитывая ограничения, получим дугу этой окружности, попадающую в сектор между прямыми $a=0$ и $a=x$. Выполнив отражения, получим кривую, изображенную на рис. 32.

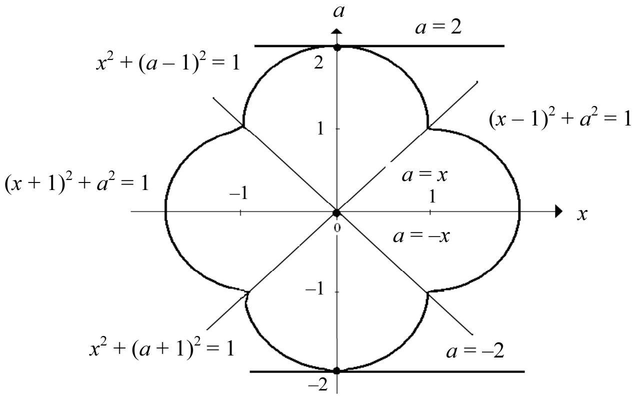

Рис. 32

Из рис. 32 заключаем, что единственное решение будет в том случае, если прямая $a = \text{const}$ имеет одну точку пересечения с построенной кривой. Таковыми являются прямые $a = \pm 2$, которым соответствует решение $x = 0$. Значит, $p - 3 = \pm 2$, $p = 1$ или $p = 5$.

Ответ. Он совпал с ранее полученным в решении 1.

Решение 3 (графическим методом). Одно из чисел a или $-a$ неотрицательно. Уравнение $x^2 + a^2 = |x - a| + |x + a|$ можно записать в виде $x^2 + a^2 = |x - |a|| + |x + |a||$.

Запишем эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} f(x,a) = x^2 + a^2, \\ g(x,a) = |x - |a|| + |x + |a||, \\ f(x,a) = g(x,a). \end{cases}$$

Графиком функции $y = f(x,a)$ на координатной плоскости (x, y) является парабола, симметричная относительно оси Oy, с вершиной в точке $(0; a^2)$, ветви которой направлены вверх.

Для построения графика функции $y = g(x,a)$ освободимся от знака модуля:

$$g(x,a) = \begin{cases} -2x, & x \le -|a|, \\ 2|a|, & -|a| \le x \le |a|, \\ 2x, & x \ge |a|. \end{cases}$$

Единственное решение будет в случае касания параболы и прямой $y = 2|a|$ (рис. 33).

Следовательно, $x = 0$ и выполняется равенство $a^2 = 2|a|$, откуда находим возможные значения параметра: $a_1 = 0,\ a_2 = -2,\ a_3 = 2$.

Рассмотрим случай $a = 0$. При этом значении параметра графики функций $y = x^2$ и $y = 2|x|$ имеют три точки пересечения (рис. 34).

Следовательно, $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Рассмотрим случай $a = 2$. Достаточно показать, что выполняется неравенство $f(x,2) > g(x,2)$ при всех $x > 0$. Это означает, что графики функций $y = f(x,2)$ и $y = g(x,2)$ не имеют точек пересечения при $x > 0$. Имеем:

а) если $0 < x \le 2$, то $x^2 + 4 > 4 \Leftrightarrow x^2 > 0$;

б) если $x \ge 2$, то $x^2 + 4 > 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 3 > 0$, что справедливо при всех x, в том числе и при $x \ge 2$.

Вывод: $a = 2$ удовлетворяет условию задачи.

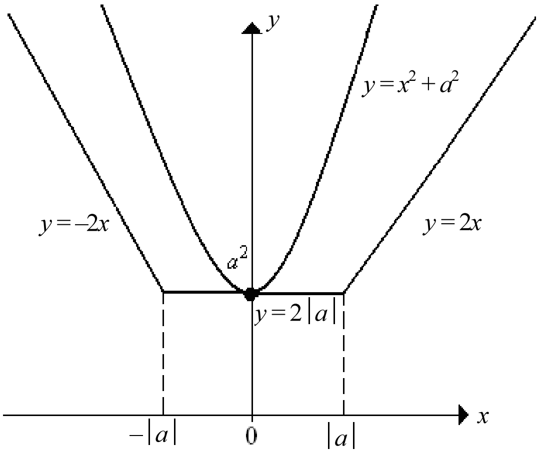

Рис. 33

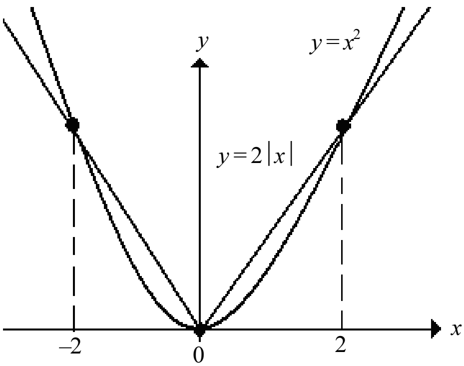

Рис. 34

Аналогично рассматривается случай $a=-2$:

$$f(x,-2)>g(x,-2) \Leftrightarrow x^2+4>-2x \Leftrightarrow x^2+2x+4>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+3>0,$$

что справедливо при всех $x\le -2$.

Вывод: $a=-2$ удовлетворяет условию задачи.

Значит, $p-3=\pm 2$, $p=1$ или $p=5$.

Ответ. $p=1$ или $p=5$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ (МЕТОД ОБЛАСТЕЙ)

1. Изобразите на плоскости (x,a) множество решений неравенства:

а) $\dfrac{\sqrt{x}-a}{1+x+a}\le 0$;

б) $(ax-1)(a-\sqrt[3]{x})\ge 0$.

2. Найдите все значения параметра x, при каждом из которых неравенство $x^2-(5a+3)x+(4a^2+3a)>0$ выполняется для любого a из промежутка $a\in(0;1)$.

Указание. Примените метод областей для решения равносильной системы

$$\begin{cases}(x-a)(x-(4a+3))>0;\\ 0<a<1.\end{cases}$$

Ответ. $x\in(-\infty;0]\cup[7;+\infty)$.

3. Найдите все положительные значения параметра a, при которых для любого числа из отрезка $[1;2]$ *верно* неравенство $\left|ax+4|x|-11\right|<7$, а для любого числа из отрезка $[-2;-1]$ это неравенство *не верно*.

Указание. Примените метод областей для системы

$$\begin{cases}\begin{cases}|\,ax+4\,|\,x\,|-11\,|<7,\\ 1\le x\le 2;\end{cases}\\ \begin{cases}|\,ax+4\,|\,x\,|-11\,|\ge 7,\\ -2\le x\le -1;\end{cases}\\ \qquad a>0.\end{cases}$$

Ответ. $a\in[2;5)$.

4. Найдите все положительные значения параметра *a*, при которых для любого числа из отрезка $[2;4]$ *верно* неравенство $\left|ax+4\,|\,x\,|-16\right|<8$, а для любого числа из отрезка $[-3;-1]$ это неравенство *не верно*.

Указание. Примените метод областей для системы

$$\begin{cases}\begin{cases}|\,ax+4\,|\,x\,|-16\,|<8,\\ 2\le x\le 4;\end{cases}\\ \begin{cases}|\,ax+4\,|\,x\,|-16\,|\ge 8,\\ -3\le x\le -1;\end{cases}\\ \qquad a>0.\end{cases}$$

Ответ. $a\in[4/3;2)$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $|\,x^2-6x+a\,|>10$ не имеет решений на отрезке $[a;a+6]$.

Указание. Примените метод областей для решения системы

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x^2-6x+a>10,\\ x^2-6x+a<-10;\end{array}\right.\\ a\le x\le a+6.\end{cases}$$

Ответ. $-1\le a\le\dfrac{-7+\sqrt{89}}{2}$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{x-a}{x-6a}<0$ выполняется при всех значениях x таких, что $2\le x\le 3$.

Указание. Примените метод областей к системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x-a}{x-6a} < 0; \\ 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

Ответ. $a \in (1/2; 2)$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $a^{x+3} + a^{5+3\log_a x} > x^{3+x\log_x a} + a^8$ содержит семь целых чисел.

Указание. Примените метод областей к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} (a-1)(x-a)(x-5) > 0; \\ a > 0, \quad a \ne 1; \\ x > 0, \ \ x \ne 1. \end{cases}$$

Ответ. $(12;13]$.

8. Найдите все положительные значения параметра a, при которых область определения функции

$$f(x) = \left(\left(\sqrt{a}\right)^{2x+1} + \sqrt{x} \cdot a^3 - x^{0,5+x\log_x a} - \left(\sqrt{a}\right)^7 \right)^{0,5}$$

содержит не более двух целых чисел.

Указание. Примените метод областей к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} (a-1)(x-3)(\sqrt{a} - \sqrt{x}) \ge 0; \\ a > 0; \\ x > 0, \quad x \ne 1. \end{cases}$$

Ответ. $a \in (1;5)$.

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Решите уравнение $(x-1)\sqrt{x-a}=0$.

2. Решите уравнение $(a^2-4)x=a+2$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $a\cdot 2^x+2^{-x}=5$ имеет единственное решение?

4. При каких значениях параметра a уравнение $(a+1)4^x-2^x+3=0$ имеет единственное решение?

5. При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt{1-x^2}>a-x$ имеет решение?

6. При каком значении параметра a функция $y=f(x+a)$, где $f(x)=5^x+5^{2-x}$, будет четной?

7. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $4x^2-28x+a=0$ равна 22,5?

8. При каких значениях параметра a разность корней уравнения $2x^2-(a+1)x+(a-1)=0$ равна их произведению?

9. При каких значениях параметра a выражение $1+\sin x(3\sin x+$ $+a\cos x)$ не равно нулю ни при каких значениях x?

10. При каких значениях параметра a уравнение $\log_2(4^x-a)=x$ имеет единственное решение?

11. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{a+x}=x$ имеет два корня?

12. Для каждого $a\in(-1;1)$ найдите число корней уравнения $|x+1|=3-ax$.

13. Найдите наименьшее положительное значение параметра a, при котором функция $f(x)=3ax^3-2\sin\dfrac{8\pi a-x}{5}$ будет нечетной.

14. При каких значениях параметра a число π является периодом функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{a-\cos x}$?

15. Найдите положительные значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2-3ax+a^2=0$ удовлетворяют условию $x_1^2+x_2^2=$ $=1,75$.

16. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x из промежутка $[3;9]$ значение выражения $\log_3^2 x+a$ не больше значения выражения $(a+1)\log_3 x$.

17. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнения $2x^2-ax-8$ и $x^3+bx-16$ имеют два общих корня; найдите эти корни.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2-(3a-1)x+2a^2-a\le 0; \\ ax=1 \end{cases}$$

имеет решение.

19. Найдите все значения параметра a такие, что уравнение $|x+3|-1=|2x-a|$ имеет единственное решение.

20. Найдите все значения параметра a такие, что уравнение $|x-3|-|2x+a|=1$ имеет единственное решение.

21. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x-|3x-|x+a||=9|x-3|$ имеет два корня.

22. Найдите все такие значения параметра a, что наименьшее значение функции $|x^2-(1+a)x+a|+(a-1)|x+1|$ меньше 2.

23. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых из неравенств $0\le x\le 1$ следует неравенство $(a^2+a-2)x^2-(a+5)x-$ $-2\le 0$.

24. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin\sqrt{a^2-x^2}=0$ имеет десять решений.

25. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2\left|2|x|-a^2\right|=x-a$ имеет три различных решения.

26. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $f(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}$ лежит на интервале $(-3;3)$.

27. Известно, что уравнение $px^2+(p+3)x+4=0$ имеет хотя бы один корень. Найдите все значения параметра p, при которых число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения $\dfrac{x-1}{16-p}=\dfrac{1}{\sqrt{x-5}+4}$.

28. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x+3|+a=\sqrt{|x|}$ имеет два различных корня.

29. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x-2|+a=\sqrt{|x|}$ имеет два различных корня.

30. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

31. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x+2+a}=a-x^2$ имеет два различных корня.

32. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax-1=|x^2-8x+15|$ имеет два различных корня.

33. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x|x-2a|+a^2-1=0$ имеет единственное решение.

34. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|\dfrac{6}{x}+2\right|=ax-1$ на промежутке $(-\infty;0)$ имеет более двух корней.

35. Найдите все значения параметра a, при которых наибольшее значение функции $f(x)=x^2-4(a-1)x+4a^2+6a$ на отрезке $[a;a+2]$ равно 28.

36. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{3}{x+1}=a|x-2|$ на промежутке $[0;+\infty)$ имеет более двух корней.

37. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{6}{x}-2\right|=ax-1$ на промежутке $(0;+\infty)$ имеет более двух корней.

38. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ |x|+|y|=1 \end{cases}$ имеет четыре решения.

39. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых график функции $y=2|2|x|-a^2|-x+a$ имеет три точки пересечения с осью x.

40. Найдите все значения x, при каждом из которых неравенство $(x-a)(x-a^2-2)\le 0$ выполняется при всех значениях $a\in[1;3]$.

41. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x-3|+2=ax$ имеет единственное решение.

42. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x+2}+3}+\sqrt{x-2\sqrt{x+2}+3}=a$ имеет более двух корней.

43. Найдите все значения x, при которых неравенство $(3a+1)x^2+$ $+(1-a)x-4a\ge 0$ выполняется при всех значениях параметра a из промежутка $a\in[1;2]$.

44. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2+|x+a|\ge 2$ имеет единственное решение.

45. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(|x|-1)^2+3=ax$ имеет решения.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. При $a<1$ $\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=a \end{array}\right.$; при $a=1$ $x=1$; при $a>1$ $x=a$.

2. Если $a=-2$, то x – любое; если $a=2$, то нет решений; если $a\neq\pm 2$, то $x=\dfrac{1}{a-2}$.

3. $a\leq 0$, $a=\dfrac{25}{4}$.

Указание. Выполните замену $t=2^{-x}$.

4. $a\leq -1$, $a=-11/12$.

Указание. Выполните замену $t=2^{-x}$.

5. $[-\sqrt{2};1)$.

6. 1.

Указание. Определите параметр из уравнения $f(-x+a)=f(x+a)$.

7. Таких значений параметра a не существует.

8. $a=2$.

9. $a\in(-4;4)$.

10. $\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}\bigcup[0;+\infty)$.

11. $-\dfrac{1}{4}<a\leq 0$.

12. Два корня.

13. $a=\dfrac{5}{8}$.

14. $a=0$.

15. $a=\dfrac{1}{2}$.

16. $a\geq 2$.

Указание. Выполните замену $t=\log_3 x$.

17. $a = 8,\ b = -20$. Общие корни $2 \pm 2\sqrt{2}$.

Указание. Запишите формулы Виета для суммы и произведения корней обоих многочленов. Можно иначе: разделите многочлен $x^3 + bx - 16$ на $2x^2 - ax - 8$ и приравняйте полученный остаток к нулю.

18. $\left[-1; -1/2\right] \cup \left\{1\right\}$.

19. –4; –8.

20. –4; –8.

21. $-24 < a < 18$.

22. $a < 2$.

23. $-3 \le a \le 3$.

24. $-10\pi < a < -8\pi$; $8\pi < a < 10\pi$.

25. $a = -2$; $a = -1/2$.

26. $a \in (-5; 1)$.

Указание. Значение параметра определяется из решения системы неравенств $-3 < f(x) < 3$.

27. $p = 0$.

28. $a \in (-\infty; -3) \cup (-2,75; \sqrt{3})$.

29. $a \in (-\infty; -2) \cup (-1,75; \sqrt{2})$.

30. $a \in (-3; 3,25)$.

31. $a \in \left(\frac{7}{4}; \frac{11}{4}\right) \cup [4; +\infty)$.

32. $a \in \left(\frac{2}{5}; \frac{2}{3}\right) \cup (8 - 2\sqrt{13}; +\infty)$.

33. $a \in \left(-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

34. $a \in \left(-\frac{3}{8}; -\frac{1}{3}\right)$.

Указание. Запишите равносильную систему $\begin{cases} y = ax, \\ y = 1 + \left|\frac{6}{x} + 2\right| \end{cases}$ и примените графический метод.

35. $a \in (1/2; 2)$.

36. $-8; 2$.

Указание. Наибольшее значение достигается на концах отрезка. Значения параметра определяются из решения системы

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(a) = 28; \\ f(a+2) \le 28; \end{cases} \\ \begin{cases} f(a) \le 28; \\ f(a+2) = 28. \end{cases} \end{array}\right.$$

37. $\frac{1}{3} < a < \frac{3}{8}$.

38. $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

39. –2; –0,5.

Указание. Примените графический метод к равносильной системе

$$\begin{cases} f(x,a) = g(x,a); \\ f(x,a) = 2\left|2|x| - a^2\right|; \\ g(x,a) = x - a. \end{cases}$$

40. $\{3\}$.

Указание. Примените метод областей к равносильной системе неравенств $\begin{cases} (x-a)(x-a^2-2) \le 0; \\ 1 \le a \le 3. \end{cases}$

41. $(-\infty; -1) \cup \{2/3\} \cup [1; +\infty)$.

Указание. Примените графический метод к равносильной системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x,a); \\ f(x) = |x-3| + 2; \\ g(x,a) = ax. \end{cases}$$

42. $a = 2$.

43. $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Указание. Примените метод подвижных границ к равносильному неравенству $(x+1)((3a+1)x-4) \ge 0$, заметив, что $3a+1 \ge 4$.

44. $\pm\frac{9}{4}$.

Указание. Примените графический метод к равносильному неравенству $|x+a| \geq 2-x^2$.

45. $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Примените графический метод к равносильной системе $\begin{cases} y=(|x|-1)^2, \\ y=ax-3. \end{cases}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *ЕГЭ: 1000 задач с ответами и решениями по математике*. Все задания группы С / И.Н. Сергеев, В.С. Панферов.− М.: Экзамен, 2012. − 301 с. (Серия «Банк заданий ЕГЭ»).
2. *Математика*. Подготовка к ЕГЭ-2013: учеб.-метод. пособие / Под ред. Ф.Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. − Ростов н/Д.: Легион, 2012. − 416 с.
3. *Сукманюк В.Н.* Решение задач с параметрами (метод «занавески»): учеб. пособие / В.Н. Сукманюк. − Краснодар: Просвещение, 2010. − 72 с.
4. *Сукманюк В.Н.* Решение задач с параметрами (метод «каркас функций»): учеб. пособие / В.Н. Сукманюк. − Краснодар: Просвещение-Юг, 2010. − 76 с.
5. *Сукманюк В.Н.* Решение задач с параметрами (метод «графический-классический»): учеб. пособие / В.Н. Сукманюк. − Краснодар: Просвещение-Юг, 2010. − 83 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Кузин Геннадий Андреевич

МАТЕМАТИКА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Учебное пособие

Редактор *Н.А. Лукашова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *Л.Н. Киншт*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Подписано в печать 12.02.2014. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 200 экз.
Уч.-изд. л. 3,95. Печ. л. 4,25. Изд. № 307/13. Заказ № . Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20