

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Типовой расчет для учащихся
10 – 11-х классов лицея НГТУ

УДК 514.116(07)
Т 67

Составители: *А.Г. Калашникова*, к.п.н., доц. каф. ИМт
В.Г. Голобокова, ст. преп. каф. ИМт
Т.М. Долгих, преп. технического лица НГТУ
Ф.Ф. Осокина, ст. преп. каф. ИМт
Е.В. Подолян, к.п.н., ст. преп. каф. ИМт
Т.В. Яруткина, ст. преп. каф. ИМт
О.М. Кравец, преп. лица НГТУ
Л.А. Пирожкова, преп. лица НГТУ

Рецензент: *Т.А. Козлова*, ст. преп. каф. ИМт

Работа подготовлена в лицее НГТУ

ВВЕДЕНИЕ

Типовой расчет «Тригонометрия» предназначен для учащихся 10 – 11 классов лицея НГТУ и слушателей подготовительного отделения НГТУ. Он содержит 30 вариантов по 14 задач в каждом. При решении задач необходимо знать следующие разделы программы средней школы по математике:

определение всех тригонометрических функций произвольного аргумента;

основные формулы тригонометрии (тригонометрические тождества, теоремы сложения, формулы двойного и половинного аргументов, преобразование произведений тригонометрических функций в суммы и обратные преобразования);

нахождение значений тригонометрических функций по значению одной из них;

решение тригонометрических уравнений и неравенств, выбор их решений из указанного промежутка;

построение графиков тригонометрических функций с помощью преобразований графиков функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg}x$, $y = \operatorname{ctg}x$.

Цель данного типового расчета – проверка знаний по перечисленным вопросам и умений применять их при выполнении тригонометрических преобразований, решении уравнений и неравенств, построении графиков.

Типовой расчет рекомендуется для самостоятельной работы в качестве индивидуального домашнего задания.

ВАРИАНТ 1

1. Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha}$.
2. Найдите значение $\frac{3\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha}{5\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.
3. Преобразуйте в произведение $2 - 4\sin \alpha$.
4. Сравните значения выражений A и B , если

$$A = \frac{(\cos^2 \varphi + \cos^2(\alpha + \varphi) - 2\cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha + \varphi))^2}{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha},$$

$$B = -9\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

5. Решите уравнение $3\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\cos^2 x = 2$ и найдите его корни на отрезке $[0; \pi]$.

6. Решите уравнение $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin 4x} = 0$.

7. Решите уравнение $\cos 7x + 5\cos x = \cos 4x$.

8. Решите неравенство $\cos 2x + 5\cos x + 3 \geq 0$.

9. Решите неравенство $\frac{2\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ и найдите его решения на

отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

10. Косинус угла треугольника равен $\frac{9}{41}$. Найдите синус внешнего угла треугольника, смежного с данным углом.

11. Определите графически число корней уравнения $\sin 2x = -|x + 1|$.

12. Постройте график функции $y = -3\sin(4x - 4) + 1$.

13. Постройте график функции $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

14. По графику п.13 построьте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 2

1. Упростите выражение $\frac{1 - \cos 4\alpha}{\cos^{-2} 2\alpha - 1} + \frac{1 + \cos 4\alpha}{\sin^{-2} 2\alpha - 1}$.
2. Найдите значение $\frac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.
3. Преобразуйте в произведение $1 + 2\cos\alpha$.
4. Сравните значения выражений A и B , если

$$A = \frac{\sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\cos^2 \alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)},$$

$$B = 4\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right).$$

5. Решите уравнение $\cos^2 5x + 7\sin^2 5x = 8\cos 5x \sin 5x$ и найдите его корни на отрезке $[0; \pi]$.

6. Решите уравнение $(1 - \cos x) / \left(\sin \frac{x}{2}\right) = 2$.

7. Решите уравнение $\sin\left(\frac{7\pi}{4} + x\right) + \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$.

8. Решите неравенство $5\sin^2 x + \sin^2 2x > 4\cos 2x$.

9. Решите неравенство $\frac{2(1 - \operatorname{tg}^2 6x)}{1 + \operatorname{tg}^2 6x} > \sqrt{3}$ и найдите все его реше-

ния на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

10. Косинус суммы двух углов равен $0,3$, косинус разности тех же углов равен $0,8$. Найдите произведение синусов данных углов.

11. Определите графически число корней уравнения $x^2 - |\sin x| = 0$.

12. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x + 1) - 3$.

13. Постройте график функции $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

14. По графику п. 13 постройте графики $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 3

1. Упростите выражение $\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$.

2. Найдите значение $\frac{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}{5 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{9}$.

3. Преобразуйте в произведение $1 - 4 \sin^2 \alpha$.

4. Сравните значения выражений A и B , если

$$A = \frac{\sin^4 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \cos^4 \alpha}{(\operatorname{tg} 2\alpha - 1) \cdot \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{3\pi}{4} \right) \cdot (1 - \sin 2\alpha)},$$

$$B = -5 \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - 6 \operatorname{arccctg}(-1).$$

5. Решите уравнение $\sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 30^\circ) = 0$ и найдите его корни на отрезке $[-180^\circ; 0^\circ]$.

6. Решите уравнение $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \sin \frac{x}{2}$.

7. Решите уравнение $\cos(x + 120^\circ) = -\sqrt{3} \sin x$.

8. Решите неравенство $\sin^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x < 0$.

9. Решите неравенство $\frac{8 \operatorname{tg} \alpha}{5(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \leq -\frac{\sqrt{12}}{5}$ и найдите его решения на отрезке $[-\pi; 0]$.

10. Косинусы углов треугольника соответственно равны $\frac{12}{13}$ и $\frac{3}{5}$.

Найдите синус третьего угла треугольника.

11. Определите графически число корней уравнения $x^2 + 6 - 5x = |\cos x|$.

12. Постройте график функции $y = 3 \sin(2x - 2) + 0,5$.

13. Постройте график функции $f(x) = \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

14. По графику п.13 построьте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 4

1. Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}$.

2. Найдите значение $\frac{\sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2$.

3. Преобразуйте в произведение $3 - 4 \cos^2 \alpha$.

4. Сравните значения выражений A и B , если

$$A = \frac{\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha}{(\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha + \sin 4\alpha) \left(\operatorname{ctg}(4\alpha - \pi) + \cos^{-1} \left(4\alpha - \frac{5\pi}{2} \right) \right)^2},$$

$$B = \frac{9}{2} \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 3 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

5. Решите уравнение $\sin x - \cos x - 4 \cos^2 x \cdot \sin x = 4 \sin^3 x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right]$.

6. Решите уравнение $\frac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4 \cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$.

7. Решите уравнение $\cos 7x = \cos 5x + \sin x$.

8. Решите неравенство $\sin^2 x - \frac{1}{2} \leq 0$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

9. Решите неравенство $\left(3 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) \right) / 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \geq 3\sqrt{3}$.

10. Тангенсы двух углов треугольника равны 1,5 и 5. Найдите третий угол треугольника.

11. Определите графически число корней уравнения $|\sin x| = -x^2 + x - 1$.

12. Постройте график функции $y = -2 \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{3} x + 1 \right) + 2$.

13. Постройте график функции $f(x) = \cos^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 1$.

14. По графику п. 13 постройте графики $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 5

1. Упростите выражение $\frac{(1 + \operatorname{tg} 2\alpha)^2 - 2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} - \sin 4\alpha - 1$.
2. Найдите значение $\frac{\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha}{2\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$.
3. Преобразуйте в произведение $3 - \operatorname{tg}^2 \alpha$.
4. Сравните значения выражений A и B , если

$$A = \frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha} + \frac{\sin\left(8\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 4\alpha\right)} - 2\sin 4\alpha + 8\sin^3 2\alpha \cdot \cos 2\alpha,$$

$$B = -5\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

5. Решите уравнение $8\sin^2 \frac{x}{2} + 3\sin x - 4 = 0$ и найдите его корни на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
6. Решите уравнение $\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = 0$.
7. Решите уравнение $\sin 3x = \sin 2x + \sin x$.
8. Решите неравенство $\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos x \leq 0$.
9. Решите неравенство $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} \leq -\frac{1}{2}$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
10. В равнобедренном треугольнике косинус угла при вершине равен $\frac{7}{9}$. Определите синус и косинус угла при основании.
11. Определите графически число корней уравнения $|\sin 2x| = x - 1$.
12. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\sin(2x - 4) - 3$.
13. Постройте график функции $f(x) = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$.
14. По графику п. 13 построьте графики $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 6

1. Упростите выражение $\frac{\left(\cos \alpha + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin 2\alpha - \sin \alpha}$.
2. Найдите значение $\frac{\sin \alpha}{2 - 3 \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.
3. Преобразуйте в произведение $\sqrt{2} \sin \alpha - 1$.
4. Сравните значения выражений A и B , если
 $A = \left(\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos \alpha + \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right) / \left(\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{ctg} \alpha\right)$,
 $B = 6 \arctg(-1) + 3 \operatorname{arccctg}(-1)$.
5. Решите уравнение $3 \sin^2 2x + 0,5 \sin 4x - 4 \cos^2 2x = 0$ и найдите его корни на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
6. Решите уравнение $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2 - \operatorname{tg} x$.
7. Решите уравнение $\cos 8x + \cos 6x = \sqrt{3} \cos x$.
8. Решите неравенство $(\sin x + \cos x)^2 \leq \frac{1}{2}$.
9. Решите неравенство $\frac{-\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4}} \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$ на отрезке $[-\pi; 2\pi]$.
10. Косинус одного из углов вписанного в окружность четырехугольника равен $\frac{15}{17}$. Найдите синус противолежащего ему угла.
11. Определите графически число корней уравнения $\sin x = \frac{2}{\pi} |x - \pi|$.
12. Постройте график функции $y = -3 \sin(2x + 1) + 2$.
13. Постройте график функции $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$.
14. По графику п.13 постройте графики $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 7

1. Упростите выражение $\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha}$.

2. Найдите значение $\frac{2}{3 + 4 \cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 0, 2$.

3. Преобразуйте в произведение $1 + \sqrt{2} \cos \alpha$.

4. Сравните значения выражений A и B , если

$$A = \frac{3 - 4 \cos(4\alpha - 3\pi) - \cos(5\pi + 8\alpha)}{4 \sin^2\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)} + \sin\left(4\alpha + \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$B = -3 \arcsin(-1) - 4 \operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

5. Решите уравнение $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ и найдите его корни на отрезке $[-\pi; 0]$.

6. Решите уравнение $\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} = \operatorname{ctg} x$.

7. Решите уравнение $\cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \sin(\pi - x)$.

8. Решите неравенство $\sin^2 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x - 3 \sin 2x + \frac{3\sqrt{2}}{2} > 0$ на отрезке $[0; \pi]$.

9. Решите неравенство $\frac{-\sqrt{3}(1 - \operatorname{tg}^2 4x)}{3(1 + \operatorname{tg}^2 4x)} \leq \frac{1}{2}$.

10. Синусы двух острых углов треугольника соответственно равны $20/29$ и $3/5$. Найдите косинус внешнего угла треугольника, не смежного с двумя данными.

11. Определите графически число корней уравнения $\cos x = |x|$.

12. Постройте график функции $y = 2 \cos\left(\frac{1}{2}x + 2\right) - 3$.

13. Постройте график функции $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$.

14. По графику п.13 постройте графики $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 8

1. Упростите выражение $\frac{(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + 1)(\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)}{(\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1)}$.
2. Найдите значение выражения $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.
3. Преобразуйте в произведение $1 + \sin \alpha + \cos \alpha$.
4. Найдите $\alpha + \beta$, если $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ – корни уравнения $6x^2 - 5x + 1 = 0$.
5. Решите уравнение $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ и найдите его корни на отрезке $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.
6. Решите уравнение $\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin x} = 0$.
7. Решите уравнение $2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{20}\right) = \sin \frac{2\pi}{5}$.
8. Решите неравенство $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x < 0$.
9. Решите неравенство $\cos x \cos 2x > \sin x \sin 2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.
10. Сумма тангенсов углов равна 2, а тангенс суммы этих углов равен 4. Найдите тангенс каждого угла.
11. Определите графически число корней уравнения $\sin x = |x - 1|$.
12. Постройте график функции $y = -2 \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.
13. Постройте график функции $f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$.
14. По графику п. 13 постройте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 9

1. Упростите выражение $\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha} - \cos 8\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha$.
2. Найдите значение выражения $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$.
3. Преобразуйте в произведение $1 - \cos \alpha + \sin \alpha$.
4. Найдите $\alpha + \beta$, если $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ – корни уравнения $3x^2 - (3 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$.
5. Решите уравнение $\sqrt{3} \sin 3 - \cos 3x = 1$ и найдите его корни на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
6. Решите уравнение $\frac{0,5 - \cos x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = 0$.
7. Решите уравнение $\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x$.
8. Решите неравенство $\operatorname{tg}^2 x - 1 \leq 0$.
9. Решите неравенство $\sin 2x \cos 2x + \cos 2x \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.
10. Отношение синуса суммы двух углов к синусу их разности равно $\frac{1}{2}$. Разность тангенсов этих углов равна 2. Найдите сумму их тангенсов.
11. Определите графически количество корней уравнения $\sin x = -|x + 1|$.
12. Постройте график функции $y = 2\cos(3x - 6) + 0,5$, преобразуя график функции $y = \cos x$.
13. Постройте график функции $f(x) = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$.
14. По графику п. 13 построьте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 10

1. Упростите выражение $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos(2\alpha - 2\pi)\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5}{4}\pi\right)} + \cos^2 \alpha$.
2. Найдите значение выражения $\frac{5}{6 + 7\sin 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0,2$.
3. Преобразуйте в произведение $1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha$.
4. Найдите $\alpha + \beta$, если $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ – корни уравнения $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$.
5. Решите уравнение $3\sin \frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos \frac{x}{2} = 3$ и найдите его корни на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
6. Решите уравнение $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x + 1} = 0$.
7. Решите уравнение $\cos 7x \cos 3x = \cos 4x$.
8. Решите неравенство $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x - \sqrt{3}\operatorname{ctg}^2 x - \sqrt{3} \geq 0$.
9. Решите неравенство $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x < \frac{1}{2}$ на отрезке $[0; \pi]$.
10. Тангенс суммы двух углов треугольника равен 2. Найдите синус третьего угла треугольника.
11. Определите графически число корней уравнения $\sin 2x = |2x - 1|$.
12. Постройте график функции $y = 2\cos(3x + 3) - 4$.
13. Постройте график функции $f(x) = 4\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)$.
14. По графику п. 13 построьте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 11

1. Упростите выражение $\frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$.
2. Найдите значение выражения $\sqrt{\sin^2 \frac{3x}{2} + \cos 3x}$, если $\sin \frac{3x}{2} = \frac{2}{7} \sqrt{10}$, $0^\circ < x < 60^\circ$.
3. Преобразуйте в произведение $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha$.
4. Найдите $\alpha + \beta$, если $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ – корни уравнения $x^2 - (1 + \sqrt{3}) \cdot x + \sqrt{3} = 0$.
5. Решите уравнение $\sin x + 7 \cdot \cos x = 5$ и найдите его корни на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.
6. Решите уравнение $\frac{\sin^2 x - 1}{\sin x - 1} = 0$.
7. Решите уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin \frac{\pi}{6} = 0$.
8. Решите неравенство $\operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x - 2 \leq 0$.
9. Решите неравенство $\sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x \geq \frac{1}{2}$ на отрезке $[0; 2\pi]$.
10. Косинус одного из углов вписанного в окружность четырехугольника равен $\frac{12}{13}$. Найдите синус противолежащего ему угла.
11. Определите графически количество корней уравнения $|2x + 1| = \sin 2x$.
12. Постройте график функции $y = -\operatorname{ctg}(2x + 1) + 3$.
13. Постройте график функции $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.
14. По графику функции п. 13 построьте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 12

1. Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha}{4 \sin \alpha \sin 2\alpha}$.
2. Найдите значение выражения $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha}$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{15}$.
3. Преобразуйте в произведение $1 - \sin \alpha + \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha$.
4. Найдите $\alpha + \beta$, если $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ – корни уравнения $3x^2 + (3 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$.
5. Решите уравнение $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3}$ и найдите его корни на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
6. Решите уравнение $\frac{\sin x - 1}{\operatorname{tg} x} = 0$.
7. Решите уравнение $\cos(x + 70^\circ) \cos(x + 10^\circ) = \sin 30^\circ$.
8. Решите неравенство $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 0$.
9. Решите неравенство $\cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке $[0; 2\pi]$.
10. Синус угла, образованного диагональю ромба с его стороной, равен 0,2. Найдите косинусы углов ромба.
11. Определите графически число корней уравнения $2 \sin \frac{x}{2} = |x - 2|$.
12. Постройте график функции $y = 3 \cos(2x + 1) - 2$.
13. Постройте график функции $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
14. По графику п. 13 постройте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 13

1. Упростите выражение $\frac{\cos 2x + 5 \cos 3x + \cos 4x}{\sin 2x + 5 \sin 3x + \sin 4x}$.
2. Упростите выражение $\sqrt{\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}}$, если $\alpha \in [\pi; 2\pi]$.
3. Преобразуйте в произведение $1 - 2 \cos \alpha$.
4. Найдите $\alpha + \beta$, если $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ – корни уравнения $3x^2 + 2\sqrt{3}x - 3 = 0$.
5. Решите уравнение $\sqrt{3} \sin(x - 45^\circ) + \sin(x + 45^\circ) = \sqrt{2}$ и найдите все его корни на отрезке $[0^\circ; 180^\circ]$.
6. Решите уравнение $\frac{\cos 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$.
7. Решите уравнение $2 \sin x \sin 2x + \cos 3x = 0$.
8. Решите неравенство $\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x < 0$.
9. Решите неравенство $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
10. Косинус центрального угла, опирающегося на данную дугу, меньшую четверти окружности, равен $\frac{1}{9}$. Найдите синус, косинус и тангенс вписанного угла, опирающегося на эту же дугу.
11. Определите графически число корней уравнения $2 \sin \frac{x}{2} = |x + 2|$.
12. Постройте график функции $y = 4 \cos(2x + 4) - 1$.
13. Постройте график функции $f(x) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.
14. По графику функции п. 13 постройте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 14

1. Упростите выражение $\frac{\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha + \sin 4\alpha}$.
2. Упростите выражение $\sqrt{\sin^2 \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)}$, если $\alpha \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$.
3. Преобразуйте в произведение $1 + 2\sin 2\beta$.
4. Найдите $\alpha + \beta$, если $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ – корни уравнения $x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$.
5. Решите уравнение $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{3x}{2}$ и найдите его корни на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.
6. Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0$.
7. Решите уравнение $\sin(x + 45^\circ) \sin(x - 15^\circ) = \frac{1}{2}$ и найдите его корни на отрезке $[90^\circ; 270^\circ]$.
8. Решите неравенство $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg}^2 x + \frac{\sqrt{3}}{3} \leq 0$.
9. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \geq 0$ на отрезке $[0; \pi]$.
10. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $5/13$. Определите косинус угла при вершине треугольника.
11. Определите графически число корней уравнения $3\sin \frac{x}{3} = |x - 3|$.
12. Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(1 - \frac{x}{2} \right) + 2$.
13. Постройте график функции $f(x) = 2\cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$.
14. По графику п. 13 постройте графики $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 15

1. Упростите выражение $\frac{\cos \alpha - 2 \sin 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin \alpha + 2 \cos 3\alpha - \sin 5\alpha}$.
2. Найдите угол α , если $\alpha \in [2\pi; 4\pi]$, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Преобразуйте в произведение $1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha$.
4. Вычислите без калькулятора $8 \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.
5. Решите уравнение $\cos^2 x + \sin x \cos x = 1$ и найдите его корни на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
6. Решите уравнение $\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = 0$.
7. Решите уравнение $\sin 5x = \sqrt{3}(1 + \cos 5x)$.
8. Решите неравенство $\cos 2x \sin x + 2 \cos 2x > 0$.
9. Решите неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x > \frac{5}{8}$ на отрезке $[0; \pi]$.
10. Косинусы двух углов соответственно равны $\frac{21}{29}$ и $0,8$. Найдите синус внешнего угла треугольника, не смежного с двумя данными.
11. Определите графически число корней уравнения $3 \sin \frac{x}{3} = |x + 3|$.
12. Постройте график функции $y = 2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right) - 2$, преобразуя график функции $y = \sin x$.
13. Постройте график функции $f(x) = 2 \sin x \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$.
14. По графику функции п.13 постройте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 16

1. Упростите выражение $\frac{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha - \cos 4\alpha \sin 2\alpha}$.
2. Найдите угол α , если $\alpha \in [3\pi; 4\pi]$, $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Преобразуйте в произведение $1 + 40^\circ + 2\cos 20^\circ \sin 50^\circ$.
4. Вычислите без калькулятора $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$.
5. Решите уравнение $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$ и найдите корни на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.
6. Решите уравнение $\frac{\cos 2x}{(1 - \cos 3x = \sin 3x)} = 0$.
7. Решите уравнение $1 - \cos 3x = \sin 3x$.
8. Решите неравенство $(\sin 5x + 5)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > 0$.
9. Решите неравенство $8\sin^6 x - \cos^6 x > 0$ на отрезке $[0; \pi]$.
10. Синусы двух углов треугольника равны соответственно $5/3$ и $99/101$. Найдите косинус третьего угла.
11. Определите графически число корней уравнения $\cos x = |2x - 2|$.
12. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$.
13. Постройте график функции $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$.
14. По графику функции п. 13 построьте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 17

1. Упростите выражение $\frac{\cos^2 2\alpha - 4\cos^2 \alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4\cos^2 \alpha - 1}$.
2. Найдите угол α , если $\alpha \in [540^\circ; 720^\circ]$, $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$.
3. Преобразуйте в произведение $\frac{3 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}$.
4. Вычислите без калькулятора $8\sin 20^\circ \sin 40^\circ \cos 10^\circ$.
5. Решите уравнение $1 + \sin x + \cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2} - 45^\circ\right)$ и найдите его корни на отрезке $[-180^\circ; 0^\circ]$.
6. Решите уравнение $\sin 4x \operatorname{ctg} 2x = 0$.
7. Решите уравнение $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \operatorname{ctg}^2 x + \frac{1 + \cos 2x}{\sin^2 x} = 0$.
8. Решите неравенство $\sin^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.
9. Решите неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{7}{16}$ на отрезке $[0; \pi]$.
10. В равнобедренной трапеции меньшее основание равно боковой стороне. Тангенс угла между диагональю и большим основанием равен 0,75. Найдите значения тригонометрических функций углов при меньшем основании.
11. Определите графически число корней уравнения $\cos x = |2x + 2|$.
12. Постройте график функции $y = -3\operatorname{ctg}(2x - 1) + 0,5$.
13. Постройте график функции $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}$.
14. По графику функции п. 13 построьте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 18

1. Упростите выражение $\frac{\cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin 3\alpha + \sin 4\alpha + \sin 5\alpha}$.
2. Найдите угол α , если $\alpha \in [2\pi; 4\pi]$, $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Преобразуйте в произведение $1 - \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.
4. Вычислите без калькулятора $\cos 20^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \cos 80^\circ$.
5. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$ и найдите его корни на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.
6. Решите уравнение $\cos 2x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.
7. Решите уравнение $8\sin^2 \frac{x}{2} + 3\sin x - 4 = 0$.
8. Решите неравенство $\cos^2 x - \frac{9}{2}\cos x + 2 > 0$.
9. Решите неравенство $27\cos^6 x - \sin^6 x \leq 0$ и найдите его решения на отрезке $[0; \pi]$.
10. В равнобедренном треугольнике синус угла при вершине равен $\frac{24}{25}$. Найдите синус и косинус угла при основании треугольника.
11. Определите графически число корней уравнения $\cos \frac{x}{2} = |x - 2|$.
12. Постройте график функции $y = -2\cos\left(1 + \frac{x}{2}\right) - 3$, преобразуя график функции $y = \cos x$.
13. Постройте график функции $f(x) = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}$.
14. По графику функции п. 3 построьте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 19

1. Упростите выражение $\frac{\sin 3\alpha + \sin 4\alpha + \sin 5\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}$.
2. Вычислите $\sqrt{\frac{2}{1+\sin \alpha} + \frac{2}{1-\sin \alpha}}$, если $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
3. Преобразуйте в произведение $1 - 2\sin \frac{\alpha}{2}$.
4. Вычислите без калькулятора $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$.
5. Решите уравнение $\sin^2 x - \sin^2 2x = \sin 3x$ и найдите все его корни на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.
6. Решите уравнение $\frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} = 0$.
7. Решите уравнение $1 - \cos 4x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$.
8. Решите неравенство $\cos^2 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - 2\cos 2x + \sqrt{3} < 0$ и найдите его решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.
9. Решите неравенство $\sin^6 x - 27\cos^6 x < 0$.
10. Косинус центрального угла, опирающегося на дугу, меньшую четверти окружности, равен $\frac{3}{8}$. Найдите синус, косинус и тангенс вписанного угла, опирающегося на эту же дугу.
11. Определите графически число корней уравнения $\cos \frac{x}{2} = |x + 2|$.
12. Постройте график функции $y = 3\sin(2x - 1) + 1$, преобразуя график функции $y = \sin x$.
13. Постройте график функции $f(x) = 4\sin x \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.
14. По графику функции п. 13 построьте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 20

1. Упростите выражение $\frac{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$.
2. Найдите угол α , если $\alpha \in [360^\circ; 720^\circ]$, $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Преобразуйте в произведение $3 - \sqrt{3} \operatorname{ctg} 2\alpha$.
4. Вычислите без калькулятора $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ$.
5. Решите уравнение $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ и найдите его корни на отрезке $[0; \pi]$.

6. Решите уравнение $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = 0$.

7. Решите уравнение $(1 + \cos 4x) \cdot \sin 2x = \cos^2 2x$.

8. Решите неравенство $\cos^2 2x - \frac{5}{2} \cos 2x - \frac{3}{2} \geq 0$ и найдите его решения на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

9. Решите неравенство $\sin^6 x - 8 \cos^6 x > 0$.

10. Косинус угла ромба равен $-\frac{23}{25}$. Найдите синус и косинус углов, образуемых диагоналями ромба с его сторонами.

11. Определите графически число корней уравнения $\cos 2x = |4x - 2|$.

12. Постройте график функции $y = -\operatorname{tg}(2x - 1) + 4$, преобразуя график функции $y = \operatorname{tg} x$.

13. Постройте график функции $f(x) = 2 \left(\cos^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) - \sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right) \times \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

14. По графику функции п. 13 построьте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 21

1. Упростите выражение $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1}$ и вычислите при $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
2. Вычислите $\sin \left(\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arccotg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) + \operatorname{arccotg}(-1)$.
3. Преобразуйте в произведение $1 - 4 \cos^2 \alpha$.
4. Найдите наименьшее положительное значение $\alpha - \beta$, если $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ – корни уравнения $x^2 - (\sqrt{3} - 1) \cdot x + \sqrt{3} - 2 = 0$.
5. Решите уравнение $\operatorname{tg} x (3 \operatorname{ctg} x - 16 \sin x \cdot \cos^3 x) = 0$ и найдите его корни на отрезке $[-1; 1]$.
6. Решите уравнение $\frac{1 - 4 \sin^2 x}{0,5 - \cos 2x} = 0$.
7. Решите уравнение $1 + \cos(\pi + 2x) - \cos \frac{3\pi - 2x}{2} = \cos \frac{9\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$.
8. Решите неравенство $\operatorname{tg}^2 x - 1 > 0$ на отрезке $[0; 5]$.
9. Решите неравенство $3 \cos x > 2 \sin^2 x$.
10. Котангенс суммы двух углов треугольника равен 7, а сумма тангенсов этих углов равна -1 . Найдите котангенс каждого угла.
11. Определите графически число корней уравнения $\left| \cos \frac{x}{2} \right| = 3|x - 2|$.
12. Постройте график функции $y = 0,5 \operatorname{tg}(2 - 2x) + 3$.
13. Постройте график функции $f(x) = -\sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(3x + \frac{2\pi}{3} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(3x + \frac{2\pi}{3} \right) - 1,5$.
14. По графику п.13 построьте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 22

1. Упростите выражение $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \sqrt{2} \sin \alpha}$ и вычислите, если $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

2. Найдите значение $\operatorname{tg} \left(\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \operatorname{arctg}(-1) \right)$.

3. Преобразуйте в произведение $\sqrt{3} - 2 \cos \alpha$.

4. Найдите наименьшее значение $\alpha + \beta > 0$, если $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ – корни уравнения $x^2 - \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) x - 1 = 0$.

5. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$ на отрезке $[-1; 2]$.

6. Решите уравнение $\frac{5 \cos 2x}{\cos x - \sin x} = 0$.

7. Решите уравнение $(1 + \cos 4x) \sin(\pi - 3x) = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)$.

8. Решите неравенство $1 - 2 \cos 2x > \sin^2 2x$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

9. Решите неравенство $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x} > \sqrt{3}$.

10. Найдите синус внешнего угла треугольника, если тангенс угла треугольника, смежного с внешним углом, равен $\frac{1}{3}$.

11. Определите графически число корней уравнения $|\sin x| = x + 1$.

12. Постройте график функции $y = 0,5 \operatorname{ctg} \left(1 + \frac{x}{2} \right) - 1$.

13. Постройте график функции $f(x) = \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x + \frac{5\pi}{4} \right) - \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(x + \frac{5\pi}{4} \right) - 2$.

14. По графику п. 13 построьте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 23

1. Упростите выражение $\frac{\sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \alpha + \cos \frac{\alpha}{2}}$ и вычислите его при

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{5}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

2. Вычислите без таблиц $\frac{\cos^2 5^\circ + \cos^2 1^\circ - \cos 6^\circ \cos 4^\circ}{\sin \left(\arcsin(-1) + \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) \right)}$.

3. Преобразуйте в произведение $1 - \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}$.

4. Найдите наибольшее отрицательное значение $\alpha - \beta$, если $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ – корни уравнения $x^2 + 2x - 2\sqrt{3} - 3 = 0$.

5. Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 4\sqrt{2} \cos 2x$ на отрезке $[-0,5; 0,3]$.

6. Решите уравнение $\frac{4 \cos^2 x - 3}{\cos 2x - \sin 30^\circ} = 0$.

7. Решите уравнение $\sqrt{3} \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) + \sin x \cos x = 0$.

8. Решите неравенство $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x < 1$ на отрезке $[-\pi; 0]$.

9. Решите неравенство $\frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} x} < -\sqrt{3}$.

10. Тангенс угла, образованного диагональю ромба с его стороной, равен 2. Найдите синусы углов ромба.

11. Определите графически число корней уравнения $-\left| \cos x \right| = -x^2 + x - 1$.

12. Постройте график функции $y = -0,5 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3} \right) + 1$.

13. Постройте график функции $f(x) = 4 \cos \left(\frac{x}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) \cdot \sin \left(\frac{x}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) + 1$.

14. По графику п.13 постройте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 24

1. Упростите выражение $\frac{\cos \alpha - 2 \cos(60^\circ + \alpha)}{2 \sin(\alpha - 30^\circ) - \sqrt{3} \sin \alpha}$.
2. Вычислите $\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) \right)$.
3. Преобразуйте в произведение $1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha$.
4. Найдите наименьшее положительное значение $\alpha - \beta$, если $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ – корни уравнения $z^2 - (\sqrt{3} - 1)z + \sqrt{3} - 2 = 0$.
5. Решите уравнение $\cos x \cos 4x - \cos 5x = 0$ и найдите его корни на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right]$.
6. Решите уравнение $\frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} = 0$.
7. Решите уравнение $3 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) - 2 = \sin x \cos x$.
8. Решите неравенство $1 - \cos \frac{3x}{2} + \cos 3x < 0$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.
9. Решите неравенство $\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{3x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{3x}{2}} < 1$.
10. Синус центрального острого угла равен 0,6. Найдите тангенс вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности.
11. Определите графически число корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = |\operatorname{tg} x|$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi \right]$.
12. Постройте график функции $y = 2 \sin(3x - 6) + 1,5$.
13. Постройте график функции $f(x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{5\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{5\pi}{4} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 0,5$.
14. По графику п. 13 построьте графики $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 25

1. Упростите выражение $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$ и вычислите, если

$$\cos \alpha = -\sqrt{0,5}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

2. Упростите выражение $\frac{\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos(-0,5) + \operatorname{arctg} 1\right)}{\cos^2 2^\circ + \cos^2 10^\circ - \cos 12^\circ \cos 8^\circ}$.

3. Преобразуйте в произведение $\sqrt{3} - 2 \cos \alpha$.

4. Найдите наименьшее значение $\alpha - \beta$, если $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ – корни уравнения $x^2 - 3\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$.

5. Решите уравнение $\cos 2x = 2 \cos x \cdot \cos 5x - 1$ на отрезке $[-1; 1,5]$.

6. Решите уравнение $\frac{\sin x - \cos x}{2 \cos 2x} = 0$.

7. Решите уравнение $6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$.

8. Решите неравенство $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 \geq 0$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

9. Решите неравенство $\frac{2 \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg}^2 3x} > -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

10. Косинус суммы двух углов треугольника равен $\frac{4}{5}$. Найдите тангенс третьего угла треугольника.

11. Определите графически число корней уравнения $|x - 1| = -2 \cos \frac{x}{2}$.

12. Постройте график функции $y = \operatorname{ctg}\left(0,5 - \frac{x}{3}\right) + 1$.

13. Постройте график функции $f(x) = 2\left(\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) - 1$.

14. По графику п.13 постройте графики $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 26

1. Упростите выражение $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \left(1 + \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} \right)$ и вычислите при $\cos \alpha = -0,8$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
2. Вычислите $\operatorname{tg} \left(2 \operatorname{arctg} 1 + 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Преобразуйте в произведение $4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \alpha$.
4. Найдите наименьшее положительное значение $\alpha - \beta$, если $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ – корни уравнения $x^2 - (1 + \sqrt{3})x - 2 - \sqrt{3} = 0$.
5. Решите уравнение $\sin^3 3x \cos x - \cos x^3 \sin x = 0,25$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right]$.
6. Решите уравнение $\frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x} = 0$.
7. Решите уравнение $2 \sin^2 3x + 5 \sin(1,5\pi - 3x) = 2$.
8. Решите неравенство $\cos^2 2x - 2 \cos 2x \geq 0$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.
9. Решите неравенство $\frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \frac{x}{2}} > -1$.
10. Косинус суммы двух углов равен 0,6, а косинус разности углов равен 0,3. Найдите сумму котангенсов этих углов.
11. Определите графически число корней уравнения $\left| \sin \frac{x}{2} \right| - x^2 = 0$.
12. Постройте график функции $y = -2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) - 1$.
13. Постройте график $f(x) = 2 \left(\cos^2 \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \sin^2 \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) + 1$.
14. По графику п. 13 постройте графики $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 27

1. Упростите выражение $\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha}$ и вычислите, если $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
2. Вычислите $\operatorname{tg}(4\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})) - \operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.
3. Преобразуйте в произведение $1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha$.
4. Найдите наибольшее отрицательное значение $\alpha - \beta$, если $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ – корни уравнения $3x^2 - (\sqrt{3} - 3)x - \sqrt{3} = 0$.
5. Решите уравнение $\cos^6 x \sin^6 x + \sin x = 0,25 \sin^2 2x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{8}; \pi\right]$.
6. Решите уравнение $\frac{3 \cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$.
7. Решите уравнение $\sin x \cos x + 3 \cos^2(x + \pi) = 1$.
8. Решите неравенство $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 2x}{\sqrt{3}(1 + \operatorname{tg}^2 2x)} \leq -\frac{1}{2}$.
9. Решите неравенство $\cos 2x + \sin x > 1$ на отрезке $[2\pi; 3\pi]$.
10. Найдите синус внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, если косинус внешнего угла при основании равен $1/3$.
11. Определите графически число корней уравнения $|2x - 1| = 3 \sin 2x$.
12. Постройте график функции $y = 3 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 2$.
13. Постройте график функции $f(x) = \frac{1}{2} \left(\sin^2\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - \cos^2\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \right) + 1$.
14. По графику п.13 построьте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 28

1. Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}$.

2. Найдите значение $\frac{3\sin \alpha - 5\cos \alpha}{5\sin \alpha + 3\cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{9}$.

3. Преобразуйте в произведение $3 - \operatorname{tg}^2 \alpha$.

4. Сравните значения выражений A и B , если

$$A = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos \alpha + \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{ctg} \alpha},$$

$$B = 6\arctg(-1) + 3\operatorname{arcsctg}(-1).$$

5. Решите уравнение $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ и найдите его корни на отрезке $[-\pi; 0]$.

6. Решите уравнение $\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\cos x} = 0$.

7. Решите уравнение $\cos 7x \cdot \cos 3x = \cos 4x$.

8. Решите неравенство $\operatorname{tg}^2 x - 1 \leq 0$ и найдите все решения на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

9. Решите неравенство $\sin 2x \cdot \cos x - \cos 2x \cdot \sin x \geq \frac{1}{2}$.

10. Косинус одного из углов вписанного в окружность четырехугольника равен $\frac{12}{13}$. Найдите синус противолежащего ему угла.

11. Определите графически число корней уравнения $2\sin \frac{x}{2} = |x - 2|$.

12. Постройте график функции $y = 3\cos(2x + 1) - 2$.

13. Постройте график функции $f(x) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

14. По графику п.13 постройте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 29

1. Упростите выражение $\frac{\cos 4\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha + \sin 4\alpha}$.
2. Упростите выражение $\sqrt{\frac{2\sin \alpha - \sin 2\alpha}{2\sin \alpha + \sin 2\alpha}}$, если $\alpha \in [\pi; 2\pi]$.
3. Преобразуйте в произведение $1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha$.
4. Вычислите без таблиц и без калькулятора $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$.
5. Решите уравнение $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$ и найдите корни на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.
6. Решите уравнение $\sin 4x \cdot \operatorname{ctg} 2x = 0$.
7. Решите уравнение $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \operatorname{ctg}^2 x + \frac{1 + \cos 2x}{\sin^2 x} = 0$.
8. Решите неравенство $\cos^2 x - \frac{9}{2}\cos x + 2 > 0$.
9. Решите неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{7}{16}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.
10. Косинус угла ромба равен $-\frac{23}{25}$. Найдите синус и косинус углов, образуемых диагоналями ромба с его сторонами.
11. Определите графически число корней уравнения $|\sin x| - x^2 = 0$.
12. Постройте график функции $y = 3\sin(2x - 2) + 0,5$.
13. Постройте график функции $f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 1$.
14. По графику п.13 постройте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

ВАРИАНТ 30

1. Упростите выражение $\frac{1 - \cos 4\alpha}{\cos^2 2\alpha - 1} + \frac{1 + \cos 4\alpha}{\sin^2 2\alpha - 1}$.
2. Найдите значение $\frac{\sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2$.
3. Преобразуйте в произведение $3 - 4 \cos^2 \alpha$.
4. Сравните значения выражений A и B , если

$$A = \frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} 2\alpha} + \frac{\sin\left(8\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 4\alpha\right)} - 2 \sin 4\alpha + 8 \sin^3 2\alpha \cos 2\alpha,$$

$$B = -5 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

5. Решите уравнение $3 \sin^2 2x - 0,5 \sin 4x - 4 \cos^2 2x = 0$ и найдите корни на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
6. Решите уравнение $\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} = \operatorname{ctg} x$.
7. Решите уравнение $2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{20}\right) = \sin \frac{2\pi}{5}$.
8. Решите неравенство $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x - \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 x - \sqrt{3} \geq 0$.
9. Решите неравенство $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ на $[2\pi; 3\pi]$.
10. Синус угла, образованного диагональю ромба с его стороной, равен $0,2$. Найдите косинусы углов ромба.
11. Определите графически число корней уравнения $2 \sin \frac{x}{2} = |x + 2|$.
12. Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 2$.
13. Постройте график функции $f(x) = 2 \sin x \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.
14. По графику п.13 постройте графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.